

呉工業高等専門学校

研 究 報 告

第12巻 第2号 (通巻第19号)

昭和52年3月 (1977)

目 次

1. Mysticism in John Steinbeck's Novels.....	下 村 登.....	1
2. 往復偏心正楕円カムの研究 (第2報) —平板従動節—.....	糸 島 寛 典.....	9
3. 揺動偏心正楕円カムの研究 (第1報) —円弧従動節—.....	糸 島 寛 典 河 野 正 米.....	23
4. 非線形フィードバック要素をもつゼロ・メモリ型非定常 システムの任意不規則応答分布に関する実験的研究.....	広 光 清次郎 太 田 光 雄.....	39
5. FORTRAN 演習用システム COLT/KTC	村 上 滋 樹 吉 野 信 行.....	53
6. 輝度分布によるモデリング効果の研究.....	原 田 一 彦.....	59
7. 地盤の変形解析に関する基礎的研究—2次元弾性解析—.....	小 堀 慈 久 網 干 寿 夫.....	63
8. 曲げをうける薄板の境界値問題の1例	丸 上 晴 朗.....	83
9. 岩盤斜面におけるロックボルトの効果 (模型実験)	石 井 義 明.....	93
10. コンクリート杭の動的支持力について	久 良 喜代彦.....	101
11. 履歴減衰と等価粘性減衰 (その1)	門 前 勝 明.....	115
12. 地震による構造物へのエネルギー入力と構造物のエネルギー吸収特性について	門 前 勝 明.....	127

Mysticism in John Steinbeck's Novels

(アメリカ文学) 下 村 登

Noboru SHIMOMURA

In the previous issues of the *MEMOIRS* (Vol. 9, No. 1 & Vol. 12, No. 1), I reported on "Mysticism in *To a God Unknown*" and "Social Concern and Mysticism in *The Grapes of Wrath*," respectively, as a series of my research of Steinbeck's mysticism. The present paper is supposedly a summary of the future fruit of the research.

This was rewritten from the paper which I read at the 1st International Steinbeck Conference held at Kyushu University in August, 1976, and is included as an article in *Steinbeck: East and West* published by the John Steinbeck Society of America.

Soon after the publication of the so-called sociological novel *The Grapes of Wrath* (1939), John Steinbeck suddenly became a world-famous writer. Essentially, however, he is not a realist, but a romanticist. His romanticism seems to be derived from both his lineage and environment. As for his lineage, his maternal parents were Irish and he repeatedly tells his readers about the romantic temperament of the Irish people in *East of Eden* (1952).¹ As for his environment, he loved the rural life of the Salinas Valley where he was born and brought up, and in *America and Americans* (1966), he showed that he was very much interested in the Indians' mystic folk-tales in and around the valley.² Moreover, his romanticism seems to be deeply rooted in the mysteries and wonders of the universe. Many of his works are so much influenced by varying degrees of mysticism that to understand his mysticism is to understand his romanticism and Steinbeck himself.

The mysticism in *To a God Unknown* (1933) is a clue to his later major works. The core of this novel consists of the Joseph story from Genesis in the Old Testament and the Fisher King story from the Grail legend. Jessie L. Weston, in *From Ritual to Romance*, has contended that the origin of the Fisher King story can be traced back to the worship of the dying gods, Adonis and Attis, in the ancient Near East whose resurrection supposedly renewed the land, thereby bringing about good crops.³ Even in the core of the novel we can see some relation between Christianity and paganism.

As for its contents, *To a God Unknown*, far from being Christian, is deeply rooted in paganism. The "God Unknown" in the title refers to the God over gods, long before Yahweh. Based on the relation between the highest God and man, the novel portrays Joseph Wayne's journey through hope, frustration, passion, despair, and agony to his union with the land and the salvation of soul through self-sacrifice.

As for its structure, *To a God Unknown* is predominantly influenced by Christian and pagan mysticism. In the novel are some of the most important symbols of Christianity: Abraham,

great forefather of Christ, Joseph, patriarch of a great family in Egypt, and Christ, the Holy Redeemer. The harsh side of Christianity is represented by Burton, while the compassionate side is reflected in Father Angelo. Against Christianity, Steinbeck first uses Druidism as a form of pagan mysticism: with the oak tree, and the mysterious huge rock in the pine-grove. Another form of paganism in *To a God Unknown* is the natives' primitive religion: their belief that the souls of the dead do not go away to the Kingdom but come back into the earth, and their dancing-drinking fiesta offered in supplication for rain.

Finally, Steinbeck uses Brahmanism and its belief that in the transmigration of the soul the form of rebirth is decided according to the karma, the totality of deeds committed in one life-time.⁴ Joseph himself comes back into the earth and becomes the land and the rain through self-sacrifice. Here we can also see the influence of James G. Frazer's *The Golden Bough* (1929) on *To a God Unknown*.

The relationship between Christianity and paganism can be illustrated as follows. The narrative first introduces Christianity and then a paganism that includes Druidism, Brahmanism, and the natives' primitive religion. Next comes a life-and-death strife between the two forces. Christianity and paganism have a long history of severe and bloody struggle. Even the lenient Father Angelo turns down Joseph's request to pray for rain, because it is quite at odds with Catholic dogma. But the opposed forces continue in strife. Almost all people familiar with the pagan-like Joseph Wayne, his wife Elizabeth, his sister-in-law Rama, the ranch-hand Juanito, and even Father Angelo, also acknowledge him as something like Christ. Father Angelo murmurs to himself, shaking with fright, "Thank God this man has no message. Thank God he has no will to be remembered, to be believed in.'...else there might be a new Christ here in the West.'"⁵ Here we can clearly see the fusion of Christianity and paganism. Joseph, one of the novel's most pagan characters, proves to be the most Christian as well. In the peace and salvation of his soul, the difference in the forms of religion is transcended into the sublimest ecstasy. He who has worked out his own salvation by saving others through self-sacrifice, Steinbeck seems to insist, is to be called a "Christ," no matter what form of God he may believe in. Steinbeck's mysticism in *To a God Unknown* is based on the idea — not of Yahweh who is personal, jealous, and mean, but of a "God Unknown" who is impersonal, generous, and magnificent.

In many of Steinbeck's works some kind of mysticism exists; and some gradual change in his interest in mysticism appears in his later major works. Generally, however, in each work Steinbeck's mysticism serves to help the development of the theme, and is well interwoven into the story. In *To a God Unknown*, the development of the theme — how Joseph worked out his own salvation by saving the land through self-sacrifice — is strikingly reinforced by Steinbeck's use of animistic mysticism. This reinforcement makes the novel mythic, unrestrained, powerful, and magnificent.

Steinbeck first became popular as a humorist with *Tortilla Flat* (1935). In 1936, however, when *In Dubious Battle* was published his readers were puzzled, suspecting that he had become "red." To be sure this is a strike-novel, but it reveals Steinbeck's attitude, not of fighting against the System himself, but of examining objectively the realities of the political strife between the great land owners and the migrant farm laborers. His attitude is summarized in Doc Burton's remark, "...I want to see the whole picture — as nearly as I can. I don't want

to put on the blinders of "good" and "bad", and limit my vision...."⁶ In the short story "The Raid" (1934) published before *In Dubious Battle*, we can feel the author's implicit sympathy with the new party man who says, "Forgive them because they don't know what they're doing," not with the party veteran who says, "Religion is the opium of the people."⁷

Though Steinbeck seems to have had some interest in socialism, he never was an indoctrinated socialist. He first showed his concern and sympathy toward the weak and oppressed from the lowest social stratum in *The Pastures of Heaven* (1932) and *Tortilla Flat*. Later his concern and sympathy shifted to the poor migrant farm laborers in *In Dubious Battle*, *Of Mice and Men* (1937), and *The Grapes of Wrath*. In *The Grapes of Wrath*, however, he shows his most vehement wrath against the social injustice which violates human dignity. His social concern finally becomes so intense that he predicts the advent of some social reform. Out of his social concern comes his rage against society. The rage reaches its climax in *The Grapes of Wrath*, when Steinbeck describes the great land owners limiting the acreage under cultivation and dumping produce on the ground in order to keep up the price, while so many migrants are starving. Amidst such adversities, the jobless migrant farm laborers have to organize in order to protect themselves. This need for community and solidarity is summarized in Mrs. Wainwright's remark "Ever'body's in the same wagon."⁸

And yet Steinbeck's social concern in *The Grapes of Wrath* is also accompanied by some kind of mysticism. The title of the novel itself suggests "the great winepress of the wrath of God" (Revelation 14:19), and "Joad," the name of the family, seems to mean "Judah." The exile of the Joads from the South corresponds to the exodus of the Israelites. Several names of the main characters have biblical significance: Jim Casy (Jesus Christ), Tom (Thomas, one of the twelve disciples), Rose of Sharon ("I [Christ] am the rose of Sha'ron,..." [Canticles 2:1]), Noah, and Uncle John (John the Baptist). There are also some direct quotations from the Bible, such as "Two are better than one, because they have a good reward for their labor"⁹ (Ecclesiastes 4:9-12). Besides the examples of direct quotations from the Bible, there are numerous biblical parallels and similarities. Therefore it is obvious that Steinbeck used the Bible as a source book for *The Grapes of Wrath*.

At the same time, however, we notice a questioning of traditional Christian doctrine. First, Jim Casy rejects the idea of sin, one of the basic concepts of Christianity, saying, "... 'The hell with it! There ain't no sin and there ain't no virtue. There's just stuff people do....'"¹⁰ Next, Ma, Tom, and lastly Pa reject Uncle John's overwhelming sense of sin, saying, "We ain't got the time for your sin now...."¹¹ Casy also states, "I figgered about the Holy Sperit and the Jesus road. I figgered, 'Why do we got to hang it on God or Jesus? Maybe,' I figgered, 'maybe it's all men an' all women we love; maybe that's the Holy Sperit — the human sperit—the whole shebang. Maybe all men got one big soul ever'body's a part of.'..."¹² This remark of Casy's does not stop at the rejection of his Christian sayings, but goes on beyond it to suggest something like transcendentalism by the phrase "big soul." This kind of mysticism seems equal to the fifth and last of what Warren French calls Steinbeck's "five layers," — the state of "pure consciousness."¹³ Casy further remarks, "...There was the hills, an' there was me, an' we wasn't separate no more. We was one thing. An' that one thing was holy.... But when they're all workin' together, not one fella for another fella, but one fella kind of harnessed to the whole shebang — that's right, that's holy...."¹⁴

This lesson from Casy's thought, solidified after his many experiences in life, is handed down to Tom. He tries to comfort the troubled Ma, saying, "... Then I'll be all aroun' in the dark. I'll be ever'where — wherever you look. Wherever they's a fight so hungry people can eat, I'll be there. Wherever they's a cop beatin' up a guy, I'll be there...."¹⁵ This climactic remark, which fuses Steinbeck's social concern and his mysticism, reveals Tom's resolution to follow his moral teacher Casy, the proletariat Christ-figure, as a strike-leader. Ma Joad, learning Casy's lesson after Tom's departure, now realizes the imperishability of the people. In this way, the dissolution of the family, which Ma has desperately tried to prevent, is balanced by her growing sense of community relationship and solidarity. This sense becomes so overpowering that even Rose of Sharon, hitherto considered the socially and morally weakest Joad, gives her own milk to the starving man.

To show all of this diagrammatically, let us first picture Christianity and then the rejection of Christian doctrine. Then, going beyond Christianity, we see something emerging like transcendentalism. Finally, there comes the merging of transcendentalism and the sense of human relationship and solidarity arising out of social concern. This social-mystic lesson is handed down to Tom, then to Ma, and to Rose of Sharon. In Rose of Sharon this lesson is fulfilled when she returns her milk (life) to life.

The central mystical problem of *East of Eden* (1952) is centered on a modern version of the story of Cain and Abel in the Old Testament. Following what Steinbeck called "my C-A theme,"¹⁶ the main figures are classified into two groups, the Cain and the Abel characters. After the desperate struggle between the groups, the central figure, Adam, narrowly gains the salvation of his soul. And the very person that guides Adam to his salvation is Lee, the Chinese servant. In *Journal of a Novel* (1969) Steinbeck tells Covici about Lee, "He is a philosopher. And also he is a kind and thoughtful man. And beyond all this he is going to go in the book because I need him. The book needs his eye and his criticism which is more detached than mine,"¹⁷ but he does not make it clear whether Lee is a Christian or not. In the novel, when Lee is asked by Samuel Hamilton whether he is a Presbyterian and understands the story of the Garden of Eden, he replies, "She (Liza) thought I should be something, and I went to Sunday School long ago in San Francisco. People like you to be something, preferably what they are."¹⁸ On another occasion Lee says to Adam, "I have no bent toward gods."¹⁹

And yet Lee highly praises the glory of man's free choice of his course, saying, "... But I have a new love for that glittering instrument, the human soul.... It is always attacked and never destroyed — because 'Thou mayest.'"²⁰ Actually, Lee is enjoying his life of unrestrained, free will, most unnoticed as a servant. Moreover, there is the curious episode of the four old Chinese gentlemen who have studied the story of Cain and Abel for two years with Lee. When Lee is asked by Adam whether they believe the Old Testament, he replies:

"These old men believe a true story, and they know a true story when they hear it. They are critics of truth.... Confucius tells men how they should live to have good and successful lives. But this — this is a ladder to climb to the stars.... You can never lose that. It cuts the feet from under weakness and

cowardliness and laziness."²¹

This remark suggests that Lee and the old gentlemen are fundamentally Confucians as most of the Chinese people used to be. And at the same time their attitude toward life is Taoist. Lee's following remarks afford one more glimpse into this philosophical posture:

"They are fine old men. They smoke their two pipes of opium in the afternoon and it rests and sharpens them, and they sit through the night and their minds are wonderful....Oh, they were perfectionists! They went to the root of the matter."²²

"But I (Lee) take my two pipes in the afternoon, no more and no less, like the elders.

And I feel that I am a man...."²³

East of Eden describes Adam's progression through Lee's guidance from mere goodness to his salvation. For instance, soon after the twins' birth, Cathy deserts Adam and the new-born babies. Adam is so shocked that he does not take care for or give names to the babies. Through Lee's instigation, Samuel Hamilton strikes Adam into an awareness of the twins. About ten years later, Samuel again tries to shock Adam out of his moral lethargy by informing him of the truth about Cathy. This blow actually begins his awakening. Now he sees Cathy as she is. Even when he is told by her that the twins are Charles' children, he is not a bit upset. On his drive back to his ranch from Cathy's whore-house, he finds himself saying aloud: "I'm free, I'm free. I don't have to worry any more. I'm free. She's gone. She's gone out of me. Oh, Christ Almighty, I'm free!"²⁴

Later, seriously shocked by the news of Aron's death, Adam suffers a stroke and lies in bed nearly unconscious. Though Caleb confesses his sin to his father, Adam's eyes seem to pursue him. Lee desperately pleads with Adam, saying, "Your son is marked with guilt out of himself — out of himself — almost more than he can bear. Don't crush him with rejection.... Adam, give him your blessing. Don't leave him alone with his guilt. Adam, can you hear me? Give him your blessing!"²⁵

Lee finally succeeds in his desperate and persistent persuasion. There comes a whisper out of Adam's struggling body and he says, "*Timshel!*" Having reached his salvation of soul, Adam falls into a sleep.

As we can see, at first the interpretation of the story of Cain and Abel is given by Lee and the four old Chinese gentlemen. Secondly, Adam is awakened to his spiritual needs and responsibilities by Lee. Lastly, Adam is guided to his salvation by Lee. Lee and the old Chinese gentlemen are too Chinese-American, so they do not look like real Chinese so much as Steinbeck intended. They are still meant, however, to represent Eastern philosophy. Therefore, we can conclude that Christianity, greatly stimulated by Eastern philosophy, leads to Adam's salvation.

In *East of Eden* Steinbeck thinks of this world as the arena where good and evil confront each other. He remarks, "I believe that there is one story in the world, and only one, that has frightened and inspired us, ... Humans are caught ——— in a net of good and evil. I think this is the only story we have and that it occurs on all levels of feeling and intelligence."²⁶

The Winter of Our Discontent (1961) is also written from the same view-point. In *East of Eden* the main characters are classified into two groups, good and evil, but Steinbeck explains that even the cursed one with the capital letter "C" like Cain can be saved by the free choice of his course. *The Winter of Our Discontent*, with its contemporary setting, describes the confrontation between good and evil within the mind of one individual, an educated, sound, and somewhat puritanical store-clerk, who is surrounded by the prevalent moral degradation. Compared with the allegorical *East of Eden*, *The Winter of Our Discontent* is realistic and contemporary. The fact that this novel begins on the morning of Good Friday in 1960 and ends on the day after Independence Day, seems to suggest some Christian-patriotic moral. The fact that Ethan with the family name of Hawley (holy) suffers temptation on Good Friday also seems to be very significant. On Easter Sunday morning, however, he feels renewed only because he has resolved to become rich by unfair means, temporarily throwing away his past moral righteousness.

He nearly succeeds in his foul attempts, but on the day after Independence Day, the combined problems of Danny, Marullo, and Allen, and Ethan's sense of their various guilts, drive him to his "Place" in the sea intent on suicide. Just when he tries to take out the razor blade, he notices that he still keeps the talisman that his daughter Ellen badly needs. In order to keep Ellen's light burning, he decides he should go home to return the stone to her.

The Winter of Our Discontent is predominantly Christian in tone, though the Biblical stories of the Passion and the Resurrection are inverted in purpose. We should not, however, overlook the influence of paganism. There are many factors that tempt Ethan to evil, but it is Margie Young-Hunt's fortune-telling that plays an important role in his psychology. Also it is the talisman that induces Ethan to his real moral resurrection. Putting aside the issue of whether he is killed by the waves or not, it is the talisman that helps him to achieve a moral resurrection.

As mentioned so far, Steinbeck's religious and moral quest for salvation which began with *To a God Unknown* is also a factor in his later major novels. In *The Grapes of Wrath* this attitude has some relationship with his social concern. In *East of Eden* Steinbeck insists that even the cursed one can be saved through his free choice, and in *The Winter of Our Discontent* he stresses the possibility of man's moral resurrection through the free choice between good and evil.

Each novel, however, has a different type of mysticism, according to its theme. All the major novels have both Christian and pagan elements, but the dominance of one over the other shifts gradually from paganism to Christianity, especially after *The Pearl* (1947) where the story is deeply influenced by the guilt of man.

In summing up, Steinbeck's mysticism in *To a God Unknown* is the world of overwhelming animistic mysticism. In *The Grapes of Wrath*, it becomes nature mysticism; and in *East of Eden*, symbolical, Christian mysticism. Finally in *The Winter of Our Discontent*, Steinbeck turns to a personal, conventional Christian mysticism. Steinbeck's attitude of accepting God does not change, but his idea of God shifts from a pagan to a Christian conception. This final goal of his faith is also suggested by the following remark that Steinbeck made in *Travels with Charley* (1962):

The service did my heart and I hope my soul some

good. It had been long since I had heard such an approach. It is our practice now, at least in the large cities, to find from our psychiatric priesthood that our sins aren't really sins at all but accidents that are set in motion by forces beyond our control. There was no such nonsense in this church.²⁷

The above seems to show that late in life Steinbeck became more and more conscious of the responsibility of the individual and the guilt of man -- it was a sign of his deep insight into and profound understanding of humanity, even though his later novels are less valued from the literary point of view.

NOTES

¹John Steinbeck, *East of Eden* (London : Heinemann, 1965), pp. 33, 119, 151—2, 238.

²John Steinbeck, *America and Americans* (New York : Viking Press, 1966), pp. 18—20.

³(New York : Doubleday, 1957), pp. 113—36.

⁴Naoshiro Tsuji, ed. *Veda, Avesta in The World Classics Collection* (Tokyo : Chikuma-shobo, 1967), pp. 408—09.

⁵John Steinbeck, *To a God Unknown* (London : Heinemann, 1970), pp. 203—04.

⁶John Steinbeck, *In Dubious Battle* (London : Heinemann, 1970), p. 115.

⁷John Steinbeck, "The Raid," *The Long Valley* (London : Heinemann, 1970), p. 72.

⁸John Steinbeck, *The Grapes of Wrath : Text and Criticism*, ed. Peter Lisca (New York : Viking Press, 1972), p. 606.

⁹Steinbeck, *The Grapes*, p. 570.

¹⁰*Ibid.*, pp. 31—32.

¹¹*Ibid.*, p. 535.

¹²*Ibid.*, pp. 32—33.

¹³Warren French, "Steinbeck's *The Grapes of Wrath*," in *A Study Guide to Steinbeck*, ed. Tetsumaro Hayashi (New Jersey : Scarecrow Press, 1974), pp. 35—41.

¹⁴Steinbeck, *The Grapes*, p. 110.

¹⁵*Ibid.*, p. 572.

¹⁶John Steinbeck, *Journal of a Novel* (New York : Viking Press, 1969), p. 128.

¹⁷*Ibid.*, p. 73.

¹⁸Steinbeck, *East*, p. 232.

¹⁹*Ibid.*, p. 264.

²⁰*Ibid.*, p. 264.

²¹*Ibid.*, p. 264.

²²*Ibid.*, pp. 262, 263.

²³*Ibid.*, p. 264.

²⁴*Ibid.*, p. 287.

²⁵*Ibid.*, p. 525.

²⁶*Ibid.*, p. 359.

²⁷John Steinbeck, *Travels with Charley* (London : Heinemann, 1962), p. 70.

往復偏心正楕円カムの研究 (第2報)

— 平 板 従 動 節 —

(機械工学科) 糸 島 寛 典

Studies on the Eccentric Profile Cam with a Reciprocating Follower (Report 2)

— Flat Plate Follower —

Hironori ITOSHIMA

The profile of the cam is an ellipse and the pivot of the cam is offset from the center of the ellipse. The reciprocating follower is a flat plate follower and the inclined flat plate to the stroke of the follower is used. The curve of the cam is expressed in xy coordinate.

The motion of the follower is analysed. The maximum acceleration and the maximum specific sliding are examined.

If the lift of the follower and the specific sliding at the end point are specified and if the accelerations of the follower at the starting point and the end point are specified, then each size of the cam and the eccentricity of the cam are obtained. In this way the best cam can be designed.

§ 1 緒 言

前報¹⁾において往復かたより円弧従動節をもつ偏心正楕円カムの運動、押進め角、滑り率等を論じ、ほぼ円に近い楕円の短軸上に偏心して回転軸をもつとき最適のカムが得られることがわかった。

本研究では行程軸と α の角をなす平板従動節が長軸上に偏心回転軸をもつ偏心楕円カムにおける運動を論ずるが、カムの回転角では直接解析することは困難なので前報¹⁾と同様パラメーターを用い、楕円カムの輪郭を回転直角座標で表示して従動節の変位、速度、加速度、滑り率等を求め、次に従動節のリフト、最大加速度、カムの最大滑り率を指定して最良の往復平板従動節をもつ偏心正楕円カムの設計を行う。

§ 2 記 号

a : カムの長軸半径
 b : カムの短軸半径
 c : カムの偏心量
 θ : カムの回転角
 θ_0 : 行き行程のカムの回転角
 θ_r : 戻り行程のカムの回転角
 ρ_T : カムの曲率半径

α : 従動節の傾き角
 H : 従動節のリフト
 s : 従動節上の接触点の距離
 δ : パラメーター, $\angle BAT$
 R_T : 回転中心からの半径
 σ_1 : カムの滑り率
 σ_2 : 従動節の滑り率

h : 従動節の変位

ω : カムの角速度

$dh/d\theta$: 従動節の速度 $= \omega dh/d\theta$

$d^2h/d\theta^2$: 従動節の加速度 $= \omega^2 d^2h/d\theta^2$

§ 3 往復平板従動節の運動

往復平板従動節をもつ偏心正楕円カムを図1に示す。楕円の長短軸の半径をそれぞれ a, b とし、長軸上に楕円の中心 O より c の距離に偏心した A 点を回転軸とし、 A を原点に長軸を x 軸、それに直角に y 軸を取り、回転直角座標をカム上に固定する。 A 点を原点とし従動節の行程線を η 軸とする固定座標 ξ, η をとる。 ξ 軸と x 軸のなす角を θ とすれば θ はカムの回転角となる。カムは反時計回りに回転するものとす。

平板従動節とカムの接触点を T とし、 T 点の x, y 座標を x_T, y_T とすれば次式が成立する。

$$\left(\frac{x_T - c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_T}{b}\right)^2 = 1, \quad b^2(x_T - c)^2 + a^2 y_T^2 = a^2 b^2 \quad \dots\dots\dots(1)$$

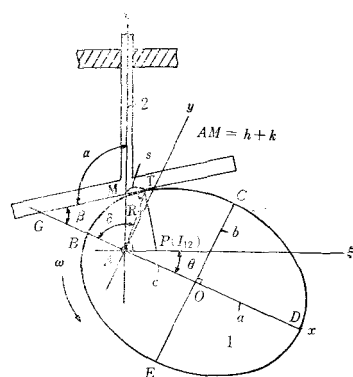


図1 往復平板従動節をもつ偏心正楕円カム

図1において回転中心 A から接触点 T までの距離を R_T とし、 R_T と x 軸の交角を δ とし、 δ をパラメーターとして x_T, y_T を表せば次式となる。

$$x_T = -R_T \cos \delta, \quad y_T = R_T \sin \delta \quad \dots\dots\dots(2)$$

式(2)を式(1)に代入して R_T を求めると吟味の結果が得られる。

$$R_T = b \times \frac{-bc \cos \delta + a \sqrt{A - c^2 \sin^2 \delta}}{A}, \quad A = a^2 \sin^2 \delta + b^2 \cos^2 \delta \quad \dots\dots\dots(3), (4)$$

図1において T 点における楕円の接線が x 軸との交点を G 、なす角を β とすれば、 β は次式で得られる。

$$\tan \beta = \frac{dy_T}{dx_T} = \frac{b^2(c - x_T)}{a^2 y_T} = \frac{b^2(c + R_T \cos \delta)}{a^2 R_T \sin \delta} \quad \dots\dots\dots(5)$$

次に η 軸と平板の交点を M とし、なす角を α とすれば $\triangle AMG$ において $\alpha = \beta + 90^\circ - \theta$ の関係が成立し、図の場合 θ を負にとれば次式が得られる。

$$\theta = \alpha - \beta - 90^\circ \quad \dots\dots\dots(6)$$

3.1 往き行程のカムの回転角

図1において x, y 軸が楕円と交わる点を B, D と C, E とし、平板従動節が B, D と接触するカムの回転角をそれぞれ θ_B, θ_D とすれば

$$\theta_B = \alpha - 180^\circ, \quad \theta_D = \alpha \quad \dots\dots\dots(7)$$

となるので、カムの往き行程と戻り行程の回転角をそれぞれ θ_o, θ_r とすれば

$$\theta_o = \theta_D - \theta_B = 180^\circ, \quad \theta_r = 360^\circ - \theta_o = 180^\circ \quad \dots\dots\dots(8)$$

となって一定である。

3.2 従動節の変位とリフト

従動節の変位を h 、 A 点からの最低高さを k とすれば図1において $AM=h+k$ 、 $\triangle AMT$ において $AM/\sin(\beta+\delta)=R_T/\sin\alpha$ なので、これから h を求めれば次式のようにになる。

$$h=R_T \frac{\sin(\beta+\delta)}{\sin\alpha} - k \quad \dots\dots\dots(9)$$

k の値を求めるために、 $\delta=0^\circ$ 、 $h=0$ として式(3)、(5)、(7)より計算すれば次式のようにになる。

$$k=(a-c)/\sin\alpha \quad \dots\dots\dots(10)$$

従動節が最高の高さになる場合は $\delta=180^\circ$ の場合で、そのときのリフトを H とすれば次式のようにになる。

$$H=2c/\sin\alpha \quad \dots\dots\dots(11)$$

3.3 従動節の速度

速度を求めるためにはカムの角速度を ω とし式(9)を時間で微分すれば $dh/dt=\omega dh/d\theta$ で得られるが、そのためには $dA/d\theta$ 、 $dR_T/d\theta$ 、 $d\beta/d\theta$ 、 $d\delta/d\theta$ を求める必要があるので、式(4)を θ で微分すれば次式を得る。

$$\frac{dA}{d\theta}=2(a^2-b^2)\sin\delta\cos\delta\frac{d\delta}{d\theta} \quad \dots\dots\dots(12)$$

式(3)を θ で微分し、前式を代入すれば次式を得る。

$$\frac{dR_T}{d\theta}=E\frac{d\delta}{d\theta}, \quad E=\frac{b\sin\delta}{A}\left\{bc+\frac{a(a^2-b^2-c^2)\cos\delta}{\sqrt{A-c^2\sin^2\delta}}-\frac{2(a^2-b^2)}{b}R_T\cos\delta\right\} \quad \dots\dots(13), (14)$$

次に式(5)を θ で微分し、式(13)を代入すれば次式を得る。

$$\frac{d\beta}{d\theta}=F\frac{d\delta}{d\theta}, \quad F=-\frac{a^2b^2\{R_T^2+c(E\sin\delta+R_T\cos\delta)\}}{a^4R_T^2\sin^2\delta+b^4(R_T\cos\delta+c)^2} \quad \dots\dots\dots(15), (16)$$

次に式(6)を θ で微分すれば、 α は一定だから式(15)より次式が得られる。

$$\frac{d\beta}{d\theta}=-1, \quad \frac{d\delta}{d\theta}=-\frac{1}{F} \quad \dots\dots\dots(17), (18)$$

式(9)を θ で微分して $dh/d\theta$ を求めれば

$$\frac{dh}{d\theta}=\frac{1}{\sin\alpha}\left\{\frac{dR_T}{d\theta}\sin(\beta+\delta)+R_T\cos(\beta+\delta)\left(\frac{d\beta}{d\theta}+\frac{d\delta}{d\theta}\right)\right\}$$

となり、これに式(13)、(15)、(18)を代入すれば次式のようにになる。

$$\frac{dh}{d\theta}=-\frac{E\sin(\beta+\delta)+R_T(F+1)\cos(\beta+\delta)}{F\sin\alpha} \quad \dots\dots\dots(19)$$

3.4 従動節の加速度

従動節の加速度は $d^2h/dt^2=\omega^2d^2h/d\theta^2$ であるので式(19)を θ で微分すれば求められるが、それには $dE/d\theta$ 、 $dF/d\theta$ を求める必要がある。

式(14)を θ で微分すれば次式が得られる。

$$\frac{dE}{d\theta}=G\frac{d\delta}{d\theta}, \quad G=\frac{b}{A}\left[\frac{a(a^2-b^2-c^2)(c^2-a^2)\sin^2\delta}{(A-c^2\sin^2\delta)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$-\frac{2(a^2-b^2)}{b}(E \cos \delta - R_T \sin \delta) \sin \delta + \left\{ bc + \frac{a(a^2-b^2-c^2) \cos \delta}{(A-c^2 \sin^2 \delta)^{\frac{1}{2}}} \right. \\ \left. - \frac{2(a^2-b^2)}{b} R_T \cos \delta \right\} \cos \delta - 2(a^2-b^2) \sin \delta \cos \delta - \frac{E}{b} \quad \dots\dots\dots (20), (21)$$

式(16)を θ で微分すれば次式が得られる。

$$\frac{dF}{d\theta} = K \frac{d\delta}{d\theta}, \quad K = \frac{1}{a^4 R_T^2 \sin^2 \delta + b^4 (R_T \cos \delta + c)^2} \left[-\frac{a^2 b^2}{F} \times \right. \\ \left. \{ 2E(R_T + c) + c(G - R_T) \sin \delta \} + 2a^4 R_T \sin \delta (E \sin \delta + R_T \cos \delta) \right. \\ \left. + 2b^4 (R_T \cos \delta + c)(E \cos \delta - R_T \sin \delta) \right] \quad \dots\dots\dots (22), (23)$$

次に式(19)を θ で微分すれば

$$\frac{d^2 h}{d\theta^2} = \frac{1}{F \sin \alpha} \left[\frac{dE}{d\theta} \sin(\beta + \delta) + E \cos(\beta + \delta) \left(\frac{d\beta}{d\theta} + \frac{d\delta}{d\theta} \right) \right. \\ \left. + \left\{ \frac{dR_T}{d\theta} (F + 1) + R_T \frac{dF}{d\theta} \right\} \cos(\beta + \delta) - R_T (F + 1) \sin(\beta + \delta) \times \right. \\ \left. \left(\frac{d\beta}{d\theta} + \frac{d\delta}{d\theta} \right) + \frac{dF}{d\theta} \frac{dh}{d\theta} \sin \alpha \right] \quad \dots\dots\dots (24)$$

となるので、これに式(17), (18), (20), (22)を代入して整理すれば次式のようにになる。

$$\frac{d^2 h}{d\theta^2} = \frac{1}{F^2 \sin \alpha} \left[\{ G - R_T (F + 1)^2 \} \sin(\beta + \delta) \right. \\ \left. + \{ 2E(F + 1) + R_T K \} \cos(\beta + \delta) + K \sin \alpha \frac{dh}{d\theta} \right] \quad \dots\dots\dots (25)$$

§ 4 カムの曲率半径

カムの曲率半径は次式で与えられている。

$$\rho_T = \frac{\left\{ \left(\frac{dx_T}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_T}{d\theta} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 x_T}{d\theta^2} \frac{dy_T}{d\theta} - \frac{dx_T}{d\theta} \frac{d^2 y_T}{d\theta^2}}$$

よって式(2)を θ で微分して上式に代入して整理すれば次式のようにになる。

$$\rho_T = \frac{\left\{ \left(\frac{dR_T}{d\theta} \right)^2 + \left(R_T \frac{d\delta}{d\theta} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{R_T^2 \left(\frac{d\delta}{d\theta} \right)^3 + 2 \left(\frac{dR_T}{d\theta} \right)^2 \frac{d\delta}{d\theta} + R_T \frac{dR_T}{d\theta} \frac{d^2 \delta}{d\theta^2} - R_T \frac{d^2 R_T}{d\theta^2} \frac{d\delta}{d\theta}} \quad \dots\dots\dots (26)$$

これに式(13), (18), (20)を代入して整理すれば次式が得られる。

$$\rho_T = \frac{(E^2 + R_T^2)^{\frac{3}{2}}}{R_T^2 + 2E^2 - R_T G} \quad \dots\dots\dots (27)$$

§ 5 滑 り 率

往復平板従動節をもつカムと従動節の滑り率を σ_1, σ_2 とすれば図1と前報²⁾により次式で与えられる。

$$\sigma_1 = \frac{\overline{TP}}{\rho_T}, \quad \sigma_2 = \frac{\overline{TP}}{\rho_T - \overline{TP}} \quad \dots\dots\dots(28), (29)$$

\overline{TP} を求めるには図1において接触点 T における法線と ξ 軸の交点を P とすれば P は瞬間中心 I_{12} なので、 $\overline{AP} = dh/d\theta$ であり、 $\angle APT = 180^\circ - \alpha$ 、 $\angle PTA = 90^\circ - (180^\circ - \beta - \delta)$ だから $\angle PAT = 90^\circ - \delta + \alpha - \beta$ となるので、 $\triangle PAT$ において \overline{TP} は次式のようにになる。

$$\overline{TP} = \sqrt{R_T^2 + \left(\frac{dh}{d\theta}\right)^2 - 2R_T \frac{dh}{d\theta} \cos(90^\circ - \delta + \alpha - \beta)} \quad \dots\dots\dots(30)$$

図1において接触点 T の位置を求めるために $\overline{MT} = s$ とすれば $\triangle AMT$ から

$$s^2 = R_T^2 + \overline{AM}^2 - 2R_T \overline{AM} \cos\{\delta - (90^\circ + \theta)\}, \quad \overline{AM} = R_T \sin(\delta + \theta) / \sin \alpha \quad \dots\dots\dots(31), (32)$$

となるので、 s は次式のようにになる。

$$s = R_T \sqrt{1 + \frac{\sin^2(\beta + \delta)}{\sin^2 \alpha} - 2 \frac{\sin(\beta + \delta)}{\sin \alpha} \cos(\alpha - \beta - \delta)} \quad \dots\dots\dots(33)$$

ただし、 $\delta > \theta + 90^\circ$ のとき $s > 0$ 、 $\delta < \theta + 90^\circ$ のとき $s < 0$ である。

§ 6 偏心量 c の選定

図1の楕円カムにおいて $\delta = 0^\circ$ すなわち行き行程の始点 B における楕円の曲率半径を ρ_B とすれば $\rho_B = b^2/a$ となるが、 $a > b$ のとき偏心量 c の大きさは $c \geq a - \rho_B$ でなければならぬ。もし c が小さいときは従動節の変位 h がある範囲負になる。よって

$$c \geq (a^2 - b^2)/a, \quad a > b \quad \dots\dots\dots(34)$$

となる。図1において $\delta = 180^\circ$ の場合従動節が最高の位置になるためには $\overline{AD} > \overline{AT}$ でなければならぬが、もし $b > a$ の場合には $\overline{AD} < \overline{AT}$ の場合を生じ、行程の途中で h が最大となることがある。 $\overline{AD} = a + c$ 、 $\overline{AT}_{max} = \rho_D = b^2/a$ から

$$a + c \geq b^2/a, \quad c \geq (b^2 - a^2)/a, \quad b > a \quad \dots\dots\dots(35)$$

となる。 a, c が指定された場合の b の範囲は式(34)、(35)から次式のようにになる。

$$\sqrt{a(a+c)} \geq b \geq \sqrt{a(a-c)} \quad \dots\dots\dots(36)$$

§ 7 計 算 例

従動節の加速度を論ずるにはリフト H が同一である必要であるので、式(11)より

$$c = \frac{H \sin \alpha}{2} \quad \dots\dots\dots(37)$$

となるので、今 $H = 1$ 、 $\alpha = 90^\circ$ のときは $c = 0.5$ となる。よって $a = 1$ の場合式(36)より $1.2247 \geq b \geq 0.7071$ となる。図2は $H = 1$ 、 $\alpha = 90^\circ$ 、 $a = 1$ 、 $c = 0.5$ 、 $b = 0.6, 0.9, 1.1, 1.3$ の場合の行き行程の変位曲線を式(9)より求め、 δ を横軸に描いたもので、 $b = 0.6$ の場合は明らかに h が負となり、 $b = 1.3$ の場合は $h > 1$ となることがわかる。 $\alpha = 90^\circ$ の場合は戻り行程は行きと同様な曲線となるので略す。

図3は $\alpha = 90^\circ$ 、 $H = 1$ 、 $c = 0.5$ 、 $b = 0.7071, 0.9, 1.1, 1.2247$ の4通りについて $d^2h/d\theta^2$ を求めたもので、 δ を横軸にして描いており、 $b = 0.7071$ の場合は $\delta = 0^\circ$ すなわち行き行程の始点 B において $d^2h/d\theta^2 = 0$ となる。これは B 点の曲率中心をカムの回転軸とした場合となり、 $b = 1.2247$ の場

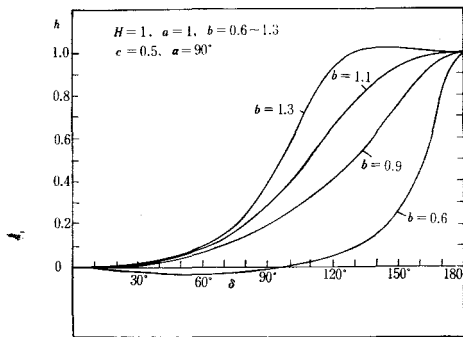


図2 $\alpha = 90^\circ$, $H = 1$, $a = 1$, $c = 0.5$ の場合
各 b に対する従動節の変位曲線

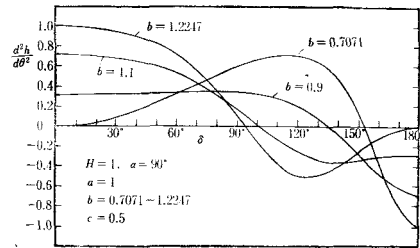


図3 $\alpha = 90^\circ$, $H = 1$, $a = 1$ の各 b に対する
 $d^2h/d\theta^2$

合は $\delta = 180^\circ$, すなわち行き行程の終点 D で $d^2h/d\theta^2 = 0$ となり, これは D 点の曲率中心を回転軸とした場合となる。

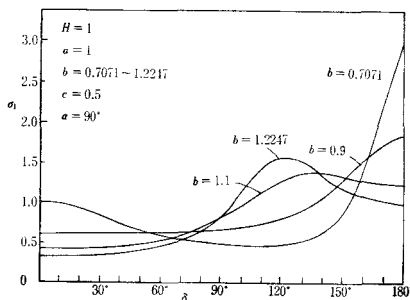


図4 図3のカムの滑り率 σ_1

図4は図3のデータの場合のカムの滑り率 σ_1 を δ を横軸に示したもので b_{min} のときは行き行程の終点で最大となり, b_{max} のときは行程の途中で最大の値をとることがわかる。

図5は図3の場合の従動節の滑り率 σ_2 を従動節の平板上の接触点の位置上に式(33)より s を求めて示したもので, σ_2 としては $b = 0.9$ の場合が最もよく, $b = 1.2247$ の場合は悪い。

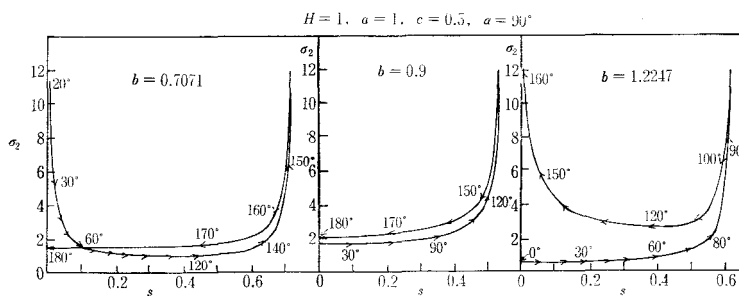


図5 図3の場合の従動節の滑り率 σ_2

§ 8 行き行程の始点と終点における加速度と滑り率

従動節の加速度は図3のように変化するが最大加速度の位置及び量は解析が困難なので, 行き行程の始点 B と終点 D の加速度を調べる。

8.1 行き行程の始点と終点の $d^2h/d\theta^2$

式(25)に $\delta = 0^\circ$, 180° を代入し整理すれば始点と終点の $d^2h/d\theta^2$ は次式のようにになる。

$$\delta=0^\circ, \quad \frac{d^2h}{d\theta^2} = \frac{-a^2+b^2+ac}{a\sin\alpha} \dots\dots\dots(38)$$

$$\delta=180^\circ, \quad \frac{d^2h}{d\theta^2} = -\frac{a^2-b^2+ac}{a\sin\alpha} \dots\dots\dots(39)$$

いまこの $d^2h/d\theta^2$ の絶対値の和を求めれば

$$\left| \frac{d^2h}{d\theta^2} \right|_{\delta=0^\circ} + \left| \frac{d^2h}{d\theta^2} \right|_{\delta=180^\circ} = \frac{2c}{\sin\alpha} = H \dots\dots\dots(40)$$

となり、一定値 H となることがわかる。よって始点の $|d^2h/d\theta^2|$ を零にすれば終点のそれは増加して H となり、またその逆となる。

8.2 往き行程の始点と終点のカムの滑り率

式(28), (27), (30)に $\delta=0^\circ, 180^\circ$ を代入すればカムの滑り率 σ_1 は次式のようにになる。

$$\delta=0^\circ, \quad \sigma_1 = \frac{a(a-c)}{b^2}, \quad \delta=180^\circ, \quad \sigma_1 = \frac{a(a+c)}{b^2} \dots\dots\dots(41), (42)$$

これから図1のカム上の B 点より D 点の方がカムの滑り率 σ_1 が大きいことがわかる。

8.3 往き行程の始点と終点の従動節の滑り率

式(29), (27), (30)に $\delta=0^\circ, 180^\circ$ を代入すれば従動節の滑り率 σ_2 は次式のようにになる。

$$\delta=0^\circ, \quad \sigma_2 = \frac{a(a-c)}{b^2-a(a-c)}, \quad \delta=180^\circ, \quad \sigma_2 = \frac{a(a+c)}{b^2-a(a+c)} \dots\dots\dots(43), (44)$$

§ 9 カムの滑り率の指定

9.1 $a>b$ の場合—図1において D 点が C 点より曲率半径が小で、式(41), (42)より D 点の方が B 点より滑り率が大なので、 D 点のカムの滑り率 σ_{1D} を指定すると式(42)と式(11)より b は次式のように求められる。

$$b = \sqrt{\frac{a(a+c)}{\sigma_{1D}}} = \sqrt{\frac{a(a+H\sin\alpha/2)}{\sigma_{1D}}} \dots\dots\dots(45)$$

これを $a>b$ に代入して σ_{1D} , a を求めれば

$$\sigma_{1D} > 1 + \frac{H\sin\alpha}{2a}, \quad a > \frac{H\sin\alpha}{2(\sigma_{1D}-1)}, \quad a > b \dots\dots\dots(46), (47)$$

となり、例えば $H=1, \alpha=60^\circ, a=1$ の場合 $\sigma_{1D} > 1.433$ となり、 $\sigma_{1D}=1.2$ の場合は $a > 2.165$ となる。

9.2 $a<b, \alpha \geq 90^\circ$ の場合—図1において、 C, E 点の曲率半径が B, D よりも小だから C, E 点のカムの滑り率 σ_{1C}, σ_{1E} を求める。図6(a)において C 点の曲率半径 $\rho_C = a^2/b$, $\overline{TD} = b+c\tan\theta_C$, $\theta_C = \alpha - 90^\circ$ から

$$\sigma_{1C} = \frac{\overline{TP}}{\rho_C} = \frac{b\{b+c\tan(\alpha-90^\circ)\}}{a^2}, \quad \delta_C = 180^\circ - \tan^{-1} \frac{b}{c} \dots\dots\dots(48)$$

図6(b)において、 $\rho_E = a^2/b$, $\overline{TP} = b - c\tan(\alpha-90^\circ)$ から次式が得られる。

$$\sigma_{1E} = \frac{b\{b-c\tan(\alpha-90^\circ)\}}{a^2}, \quad \delta_E = -180^\circ + \tan^{-1} \frac{b}{c} \dots\dots\dots(49)$$

$$\sigma_{1E} = \frac{b}{a^2} \{b + c \tan(90^\circ - \alpha)\}, \quad \delta_E = 180^\circ + \tan^{-1} \frac{b}{c} \dots \dots \dots (57)$$

が得られるので $\alpha < 90^\circ$ の場合は $\sigma_{1E} > \sigma_{1C}$ となる。よって式(51)から次式が得られる。

$$b = \frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{H \cos \alpha}{2} \right)^2 + 4a^2 \sigma_{1E}} - \frac{H \cos \alpha}{2} \right\}, \quad \alpha < 90^\circ, \quad a < b \dots \dots \dots (58)$$

そこで式(58)から $a < b$ の σ_{1E} , a を求めれば

$$\sigma_{1E} > 1 + \frac{H \sin \alpha \tan(90^\circ - \alpha)}{2a}, \quad a > \frac{H \sin \alpha \tan(90^\circ - \alpha)}{2(\sigma_{1E} - 1)}, \quad \alpha < 90^\circ, \quad a < b \dots \dots \dots (59), (60)$$

が得られ、例えば $H=1$, $\alpha=60^\circ$ とし $a=1$ の場合 $\sigma_{1E} > 1.25$, $\sigma_{1E}=1.2$ の場合は $a > 1.25$ となる。

9.4 従動節の傾斜角 $\alpha \approx 90^\circ$ の場合の計算例

$H=1$, $\alpha=60^\circ \sim 80^\circ$ の場合の計算を式(59), (60)で求めたものを図7に示す。この線より右上の場合が $b > a$ となる。もし $\alpha > 90^\circ$ の場合 $b > a$ なるためには式(54), (55)から σ_{1E} の代りに σ_{1C} を指定すればよいので、図7において例えば $\alpha=120^\circ$, 110° の場合にはそれぞれ $\alpha=60^\circ$, 70° の場合を使用し、 σ_{1E} の代りに σ_{1C} を用いればよい。

式(58)より $H=1$, $\alpha=60^\circ$, $c=0.4330127$, $b > a$ で $a=0.8 \sim 2.0$ の場合の b の値を表2に示す。 $\sigma_{1E}=1.2$ で $a < 1.25$ の場合は $b < a$ となるため記入されていないが、もし

$\alpha > 90^\circ$ の場合式(51)を使用し、 σ_{1E} の代りに σ_{1C} を用い、例えば $H=1$, $\alpha=120^\circ$, $c=0.4330127$ の場合は $b > a$ なるための b は表2と同一になる。そして α を式(58)に代入すれば $\sigma_{1E}=1.2$ で $a=0.8$, 1.0 のとき b は表2の () の値となる。

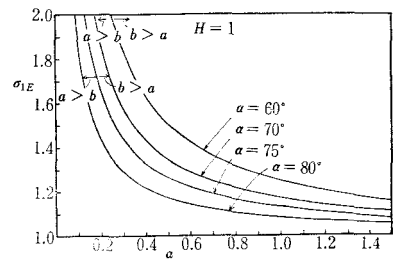


図7 $\alpha < 90^\circ$ を与えて a と σ_{1E} の限度

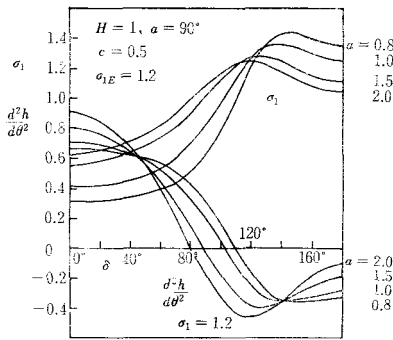
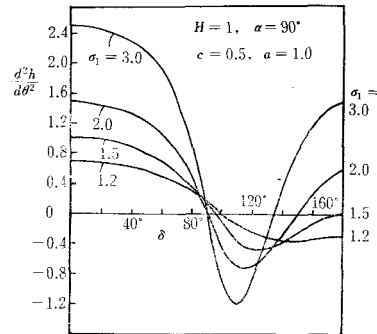
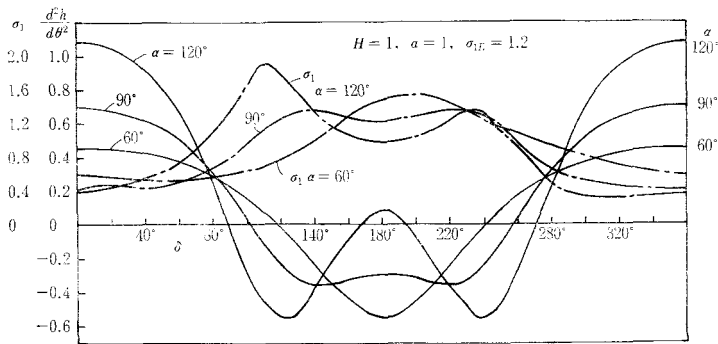
表2 $H=1$, $\alpha=60^\circ(120^\circ)$, $c=0.4330127$ の b の値, $b > a$

$a \backslash \sigma_{1E}$	0.8	1.0	1.5	2.0
2.0	1.0132552	1.2947271	2.000000	2.7061879
1.5	0.8627373	1.1061072	1.7163650	2.3276771
1.2	(1.0102260)	(1.2275539)	1.5229153	2.0694532

図8は表1の $\alpha=90^\circ$, $H=1$, $c=0.5$, $\sigma_1=1.2$ の場合の各 a と b による $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 を $\delta=0^\circ \sim 180^\circ$ について示す。図から σ_1 が指定された場合 $d^2h/d\theta^2$ は a の値が小さい程曲線が滑らかで始点、終点の $d^2h/d\theta^2$ も小さく行程の途中で大きな値をとらない。カムの滑り率 σ_1 について言えば a が大きい程最大の σ_1 が小さいが、 $a=0.8$ の場合 $\sigma_{1max} \div 1.42$ となり、この程度なら良好である。

図9は表1の $a=1.0$ を指定し各 σ_1 の場合の a , b による $d^2h/d\theta^2$ を求めたもので σ_1 の値が小さい程最大の $d^2h/d\theta^2$ が小さくなることがわかり、 σ_1 が大きいと加速度の変化も大きく、滑り率も大となるのでよくない。よって a , σ_1 共に小さい方がよいが $a > c$ であることが望ましく、カムの軸を作る上から a を余り小さくはできない。

図10において $a=1.0$, $\sigma_{1E}=1.2$ の場合の $\alpha=60^\circ$, 90° , 120° の場合の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 を δ に対して求

図8 表1の $\sigma_{1E}=1.2$ の場合の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 図9 表1の $a=1$ の場合の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 図10 $H=1, a=1, \sigma_{1E}=1.2, \alpha=60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1

めた。この図から $\alpha=120^\circ$ の場合は加速度の点からも σ_{1c} が非常に大となる点からもよくない。 α は 90° 以下の方がよいことがわかる。 α を余り小にすると押進め角 ϕ が大となるので最大押進め角 $\phi_{max} < 30^\circ$ にするためには $\alpha > 60^\circ$ の必要がある。

$\alpha=120^\circ$ の場合 $a=1, b=0.9775539, c=0.4330127$ とすれば $\sigma_{1c}=1.2$ となり、 $\alpha=60^\circ$ の場合の σ^1 曲線と $\delta=180^\circ$ を軸として左右対称になり、 $\delta=180^\circ$ で $\sigma_{1D}=1.5$ となり、 D 点の方が大となる。これは $a > b$ から明らかである。表2において $\sigma_{1E}=1.5$ の場合は常に $a < b$ だから a が小さい程加速度は良好である。

§ 10 行き行程の始点と終点の加速度が等しい場合

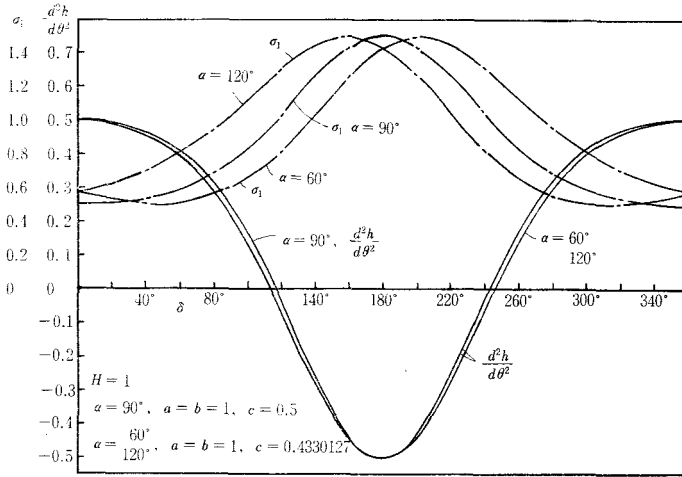
式(38), (39)より行き行程の始点 $\delta=0^\circ$ と終点 $\delta=180^\circ$ の $d^2h/d\theta^2$ の絶対値を等しくすれば $a=b$ となって偏心円板カムとなる。

$$\left(\frac{d^2h}{d\theta^2}\right)_{\delta=0^\circ} = \frac{H}{2}, \quad \left(\frac{d^2h}{d\theta^2}\right)_{\delta=180^\circ} = -\frac{H}{2} \quad (61)$$

となるが、円板カムにおいて $\alpha=90^\circ$ の場合は既に発表³⁾しているので $\alpha \neq 90^\circ$ について論ずる。カム上の4点 B, D, C, E の各点の滑り率は式(41), (42)と式(48), (49)より次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1B} &= (a-c)/a, \quad \sigma_{1D} = (a+c)/a \\ \sigma_{1C} &= \{a+c \tan(\alpha-90^\circ)\}/a, \quad \sigma_{1E} = \{a-c \tan(\alpha-90^\circ)\}/a \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

図11は $H=1, a=b=1, \alpha=60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$ の場合の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 を示す。 σ_1 に対しては式(62)か

図11 偏心円板カムの $d^2h/d\theta^2$ と σ_1

ら表3が得られる。図から α の値如何にかかわらず $\sigma_{1max}=1.5$ となり $\alpha=60^\circ$ と 120° は $\delta=180^\circ$ に対して対称となる。

表3 $H=1, a=b=1$ の偏心円板カムの滑り率 σ_1

α	c	σ_{1B}	σ_{1C}	δ_C	σ_{1D}	σ_{1E}	δ_E
60°	0.4330127	0.567	0.75	113.413°	1.433	1.25	246.587°
90°	0.5	0.500	1.00	116.565°	1.500	1.00	243.435°
120°	0.4330127	0.567	1.25	113.413°	1.433	0.75	246.587°

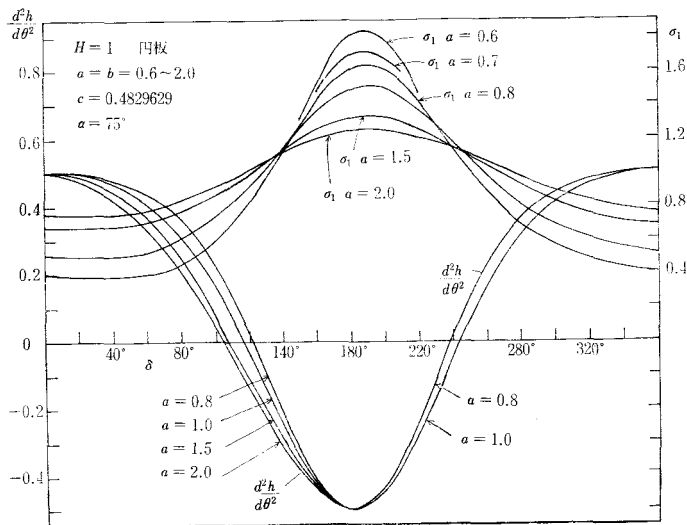
図12 $\alpha=75^\circ, H=1, a=b=0.8\sim2$ の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1

図11では $a=b=1$ としたが $a=b$ の値の変化によって $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 がどのように変化するかを図12に示す。 $H=1, \alpha=75^\circ, a=b=0.8\sim2$ の場合の $d^2h/d\theta^2$ を示すが余り変化はない。しかし σ_{1max} はか

なり変化するが a が大きい程 σ_{1max} は小となることがわかる。

§ 11 行き行程の始点の加速度を零とする場合

$\delta=0$, $d^2h/d\theta^2=0$ の場合は式(41)から

$$b = \sqrt{a(a-c)} \dots\dots\dots (63)$$

となり, 常に $b < a$ となる。図13は $H=1$, $\alpha=90^\circ$ の場合の a, b の関係を示す。例えば $\alpha=90^\circ$, $H=1$, $a=1, 2, 5$ の場合, $b=0.7071068, 1.7320508, 4.7434164$ となり図14に $h, d^2h/d\theta^2$ と σ_1 を示す。この図から a が大きい程 $d^2h/d\theta^2_{max}$ が小となり, 終点の σ_1 が小となる。

図15は平板上の σ_2 を示すが a が大きいと σ_2 がよくない。曲線上に δ の値を示す。

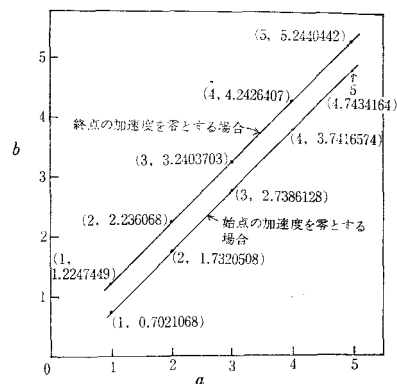


図13 $H=1$, $\alpha=90^\circ$ の a, b の関係

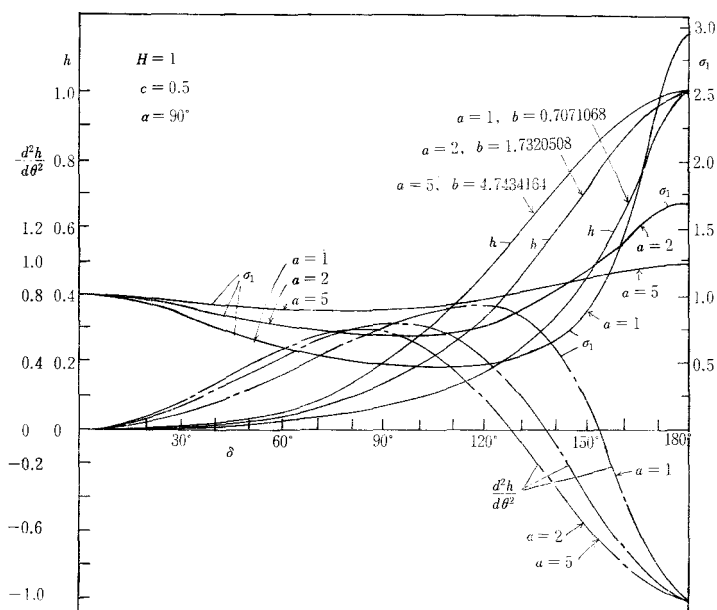


図14 $H=1$, $\alpha=90^\circ$ の場合の $h, d^2h/d\theta^2, \sigma_1$

§ 12 行き行程の終点の加速度が零の場合

$\delta=180^\circ$, $d^2h/d\theta^2=0$ の場合式(42)から

$$b = \sqrt{a(a+c)} \dots\dots\dots (64)$$

となり, 常に $b > a$ となる。図13に $\alpha=90^\circ$ の場合の a, b の関係を示している。

図16は $H=1$, $\alpha=90^\circ$, $a=1, 2, 5$ の場合の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 を示す。 $d^2h/d\theta^2_{max}$ はほぼ同じであるが, a が小さいと σ_{1max} が大きくなる。図17はこの場合の従動節の σ_2 を平板上に示したもので a が大きいと σ_2 が大となる。

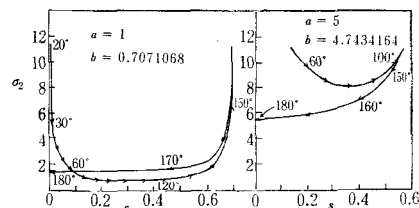


図15 従動節上の滑り率 σ_2

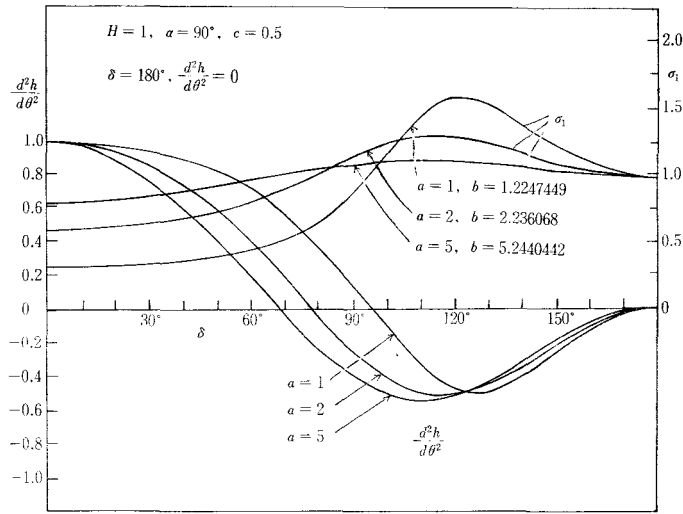
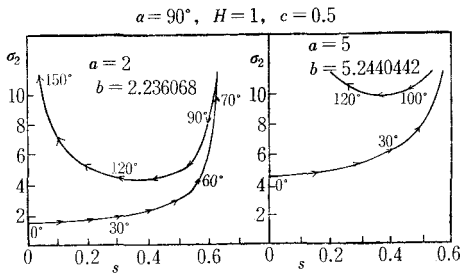
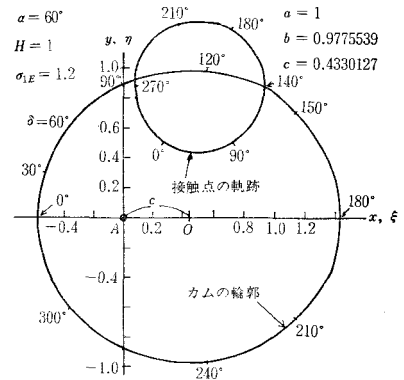
図16 終点の加速度が零の場合の $d^2h/d\theta^2$ と σ_1 図17 従動節上の滑り率 σ_2 

図18 図10のカムの輪郭と接触点の軌跡

§ 13 カムの輪郭と接触点の軌跡

カムの輪郭は図1において T 点の x, y 座標 x_T, y_T で示されるので式(2)より $x_T = -R_T \cos \delta$, $y_T = R_T \sin \delta$ で計算される。

接触点の軌跡は T 点の ξ, η 座標 ξ_T, η_T で表わされるので図1より次式となる。

$$\xi_T = x_T \cos \theta - y_T \sin \theta, \quad \eta_T = x_T \sin \theta + y_T \cos \theta \quad (65)$$

図18は図10に示す $H=1$, $\alpha=60^\circ$, $\sigma_{1E}=1.2$, $a=1$, $b=0.9775539$, $c=0.4330127$ の場合のカムの輪郭と接触点の軌跡を示す。接触点の軌跡がほぼ円形となり滑らかに運動することがわかる。

図19は往き行程の始点の加速度が零の場合の図14のうちの $H=1$, $\alpha=90^\circ$, $a=1$, $b=0.7071107$, $c=0.5$ のカムの輪郭と接触点の軌跡を示す。

図20は往き行程の終点の加速度が零の場合の図16のうちの $H=1$, $\alpha=90^\circ$, $a=1$, $b=1.2247449$, $c=0.5$ のカムの輪郭と接触点の軌跡を示す。いずれも良好である。

揺動偏心正楕円カムの研究 (第1報)

—— 円弧従動節 ——

(機械工学科) 糸 島 寛 典

河 野 正 来

Studies on the Eccentric Profile Cam with an Oscillating Follower (Report 1)

—— Circular Arc Follower ——

Hironori ITOSHIMA

Masaki KONO

The follower with the circular arc or the roller is oscillating on the elliptical profile of the cam and the pivot of the cam is offset from the center of the ellipse.

The motion of the oscillating follower is analysed. The oscillating angle, the pressure angle, the angular acceleration and the specific sliding are examined.

If the oscillating angle, the pressure angle at the starting point, the maximum angular acceleration and the specific sliding at the end point are specified, then each size of the cam, the eccentricity and the radius of the circular arc can be obtained. In this way the best cam can be designed.

§ 1 緒 言

前報¹⁾において往復円弧従動節の円弧が楕円の偏心した位置を回転軸とするカムの楕円と接触する場合の従動節の運動の解析を行った。

本報告においては揺動する円弧従動節の円弧が前と同様な偏心楕円カムの楕円と接触するすなわちカムの輪郭は正しい楕円の場合の揺動従動節の運動を解析し、従動節の揺動角、押進め角、角加速度、滑り率等を調べ、それらの最大値を指定して運動学的に最良のカムの寸法及び従動節の長さ、円弧半径を設計する。

§ 2 記 号

a : 楕円の長軸の半径

b : 楕円の短軸の半径

c : 長軸上の偏心量

d : カムと従動節の距離

δ : 楕円の長軸と AT のなす角

θ : 長軸と AB のなす角

l : 揺動従動節の長さ

r : 従動節の円弧半径

ψ : 揺動従動節の揺動角

φ_1 : 従動節が AB となす角

φ_0 : 始点における従動節が AB となす角

φ : 従動節の角変位

θ_o : 行き行程のカムの回転角

ϕ : カムの押進め角

θ_r : 戻り行程のカムの回転角

R_T : カムのラジウスベクトル AT

σ_1 : カムの滑り率

σ_2 : 従動節の滑り率

ω_1 : カムの角速度

$d\varphi_1/d\theta$: 従動節の角速度 $= \omega_1 d\varphi_1/d\theta$

ω_2 : 従動節の角速度

$d^2\varphi_1/d\theta^2$: 従動節の角加速度 $= \omega_1^2 d^2\varphi_1/d\theta^2$

ρ_T : カムの曲率半径

§ 3 偏心正楕円カムの揺動円弧従動節の運動

カム機構は図1に示すようにカム1の長径, 短径の半径はそれぞれ a, b で, その中心 O より長軸上に c だけ偏心した所を A 点とし, この点を中心として図の場合反時計回りに回転し, 従動節2は $AB=d$ の B 点を中心に円弧半径 r , 長さ l で円弧が T 点でカムと接触している。

いま長軸と AT のなす角を δ とし, 長軸と AB のなす角を θ , 従動節 BM と AB のなす角を φ_1 として δ をパラメーターとして θ, φ_1 を求める式を導く。

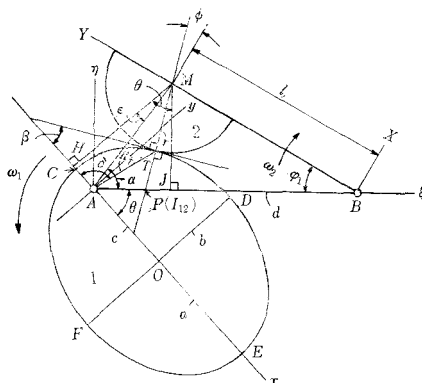


図1 揺動円弧従動節をもつ正楕円カム

原点を A , 長軸を x 軸, これと直角に y 軸をとり, x, y 座標はカムに固定され, A を中心に回転する回転座標とする。従動節においては BM を Y 軸に, これを直角に X 軸をとり, XY 座標は B 点を中心として回転するものとする。

3.1 従動節の角変位

接触点 T の x, y 座標を x_T, y_T とし長軸と短軸が楕円の交点をそれぞれ C, E と D, F とし, $\angle CAT = \delta$, $AT = R_T$ とすれば楕円の方程式と x_T, y_T は次式で示される。

$$\left(\frac{x_T - c}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_T}{b}\right)^2 = 1, \quad b^2(x_T - c)^2 + a^2 y_T^2 = a^2 b^2 \quad (1)$$

$$x_T = -R_T \cos \delta, \quad y_T = R_T \sin \delta \quad (2)$$

式(2)を式(1)に代入して整理すれば次式が得られる。

$$R_T = b \times \frac{aE - bc \cos \delta}{A} \quad (3)$$

ただし

$$A = a^2 \sin^2 \delta + b^2 \cos^2 \delta, \quad E = \sqrt{A - c^2 \sin^2 \delta} \quad (4), (5)$$

接触点 T における接線と x 軸の交角 β は式(1)を x_T で微分して次式のように求められる。

$$\tan\beta = \frac{b^2(c-x_T)}{a^2y_T} \dots\dots\dots(6)$$

次に従動節の円弧の中心 M 点の x, y 座標を x_M, y_M とし、 M 点より x 軸に垂線 MH を下せば $\angle TMH = \beta$ となるので次式が得られる。

$$x_M = -(r \sin\beta + R_T \cos\delta) = x_T - r \sin\beta \dots\dots\dots(7)$$

$$y_M = r \cos\beta + R_T \sin\delta = y_T + r \cos\beta \dots\dots\dots(8)$$

さらに $\triangle ABM$ において $\angle BAM = \alpha$ とすれば

$$l^2 = \overline{AM}^2 + d^2 - 2d\overline{AM}\cos\alpha, \quad \overline{AM} = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$$

となり、 M 点より AB に垂線 MJ を下せば $\angle HMJ = \theta$ となり、 $\angle AMH = \varepsilon$ とすれば

$$\tan\varepsilon = -x_M/y_M \dots\dots\dots(9)$$

で、図の場合 θ は負であるので $\angle AMJ = -\theta - \varepsilon = 90^\circ - \alpha$ となり、 $\theta = \alpha - \varepsilon - 90^\circ = -\varepsilon + (\alpha - 90^\circ)$ となり、 θ は次式のようにになる。

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{-x_M}{y_M} + \sin^{-1} \frac{l^2 - d^2 - (x_M^2 + y_M^2)}{2d\sqrt{x_M^2 + y_M^2}} \dots\dots\dots(10)$$

式(7)、(8)より δ を与えて θ を求めることができる。次に $\triangle ABM$ より φ_1 を求めれば

$$\varphi_1 = \cos^{-1} \frac{d^2 + l^2 - (x_M^2 + y_M^2)}{2dl} \dots\dots\dots(11)$$

となる。往き行程の始点 l が従動節に接触するときの φ_1 を φ_0 とすれば

$$\varphi_0 = \cos^{-1} \frac{d^2 + l^2 - (r+a-c)^2}{2dl} \dots\dots\dots(12)$$

となり、往き行程の終点 E が従動節と接するときの φ_1 を $\varphi_0 + \psi$ (ψ は揺動角) とすれば

$$\psi + \varphi_0 = \cos^{-1} \frac{d^2 + l^2 - (r+a+c)^2}{2dl} \dots\dots\dots(13)$$

が得られ、揺動角 ψ は次式となる。

$$\psi = \cos^{-1} \frac{d^2 + l^2 - (r+a+c)^2}{2dl} - \cos^{-1} \frac{d^2 + l^2 - (r+a-c)^2}{2dl} \dots\dots\dots(14)$$

従動節の角変位 φ は $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ から

$$\varphi = \cos^{-1} \frac{d^2 + l^2 - (x_M^2 + y_M^2)}{2dl} - \cos^{-1} \frac{d^2 + l^2 - (r+a-c)^2}{2dl} \dots\dots\dots(15)$$

となる。

3.2 往きと戻り行程のカムの回転角と c の範囲

従動節の往き行程と戻り行程のカムの回転角を θ_0, θ_r とし、図1においてカムの往き行程の始点 C と終点 E で従動節が接触するカムの回転角を θ_C, θ_E とすれば $\triangle AMB$ より

$$\theta_C = \cos^{-1} \frac{l^2 - d^2 - (r+a-c)^2}{2d(r+a-c)}, \quad \theta_E = \cos^{-1} \frac{d^2 - l^2 + (r+a+c)^2}{2d(r+a+c)} \dots\dots\dots(16), (17)$$

となり、両行程のカムの回転角は次式のようにになる。

$$\theta_o = \theta_E - \theta_C, \quad \theta_r = 360^\circ - \theta_o \dots\dots\dots (18), (19)$$

偏心量 c の大きさは図 1 において余り小さいと従動節の角変位 φ が負になる場合も生ずる。それを避けるためには長軸の端 C 点における曲率半径 $\rho_c = b^2/a$ であるので、これより AC の長さが小であればよい。すなわち

$$a - c < b^2/a, \quad a > c > (a^2 - b^2)/a \dots\dots\dots (20)$$

の範囲にあればよい。

3.3 従動節の角速度

従動節の角速度はカムの角速度を ω_1 とすれば $d\varphi_1/dt = \omega_1 d\varphi_1/d\theta$ となるので、 $d\varphi_1/d\theta$ に比例する。式(11)を θ で微分すれば次の角速度の式が得られる。

$$\frac{d\varphi_1}{d\theta} = -\frac{1}{ld \sin \varphi_1} \left(x_M \frac{dx_M}{d\theta} + y_M \frac{dy_M}{d\theta} \right) \dots\dots\dots (21)$$

ここで、この式を計算するために式(4), (5), (3)を θ で微分すれば

$$\frac{dA}{d\theta} = D \frac{d\delta}{d\theta}, \quad D = 2(a^2 - b^2) \sin \delta \cos \delta \dots\dots\dots (22)$$

$$\frac{dE}{d\theta} = F \frac{d\delta}{d\theta}, \quad F = \frac{1}{E} (a^2 - b^2 - c^2) \sin \delta \cos \delta \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{dR_T}{d\theta} = G \frac{d\delta}{d\theta}, \quad G = \frac{b}{A^2} \{ A(aF + bc \sin \delta) - D(aE - bc \cos \delta) \} \dots\dots\dots (24)$$

となる。式(2)より

$$\frac{dx_T}{d\theta} = M \frac{d\delta}{d\theta}, \quad M = R_T \sin \delta - G \cos \delta \dots\dots\dots (25)$$

$$\frac{dy_T}{d\theta} = N \frac{d\delta}{d\theta}, \quad N = R_T \cos \delta + G \sin \delta \dots\dots\dots (26)$$

となる。式(6)より

$$\frac{d\beta}{d\theta} = -a^2 b^2 J \frac{d\delta}{d\theta}, \quad J = \frac{M y_T + N(c - x_T)}{a^4 y_T^2 + b^4 (c - x_T)^2} \dots\dots\dots (27)$$

となる。式(7), (8)より

$$\frac{dx_M}{d\theta} = H \frac{d\delta}{d\theta}, \quad H = M + J a^2 b^2 r \cos \beta \dots\dots\dots (28)$$

$$\frac{dy_M}{d\theta} = K \frac{d\delta}{d\theta}, \quad K = N + J a^2 b^2 r \sin \beta \dots\dots\dots (29)$$

となる。次に $d\delta/d\theta$ を求めるには式(10)を θ で微分し、整理すれば

$$\begin{aligned} & \left(x_M \frac{dx_M}{d\theta} + y_M \frac{dy_M}{d\theta} \right) (l^2 - d^2 + x_M^2 + y_M^2) \\ & + \sqrt{4d^2(x_M^2 + y_M^2) - \{l^2 - d^2 - (x_M^2 + y_M^2)\}^2} \left(x_M^2 + y_M^2 + x_M \frac{dy_M}{d\theta} - y_M \frac{dx_M}{d\theta} \right) = 0 \end{aligned}$$

が得られる。この式に式(28), (29)を代入し

$$Q = 4d^2(x_M^2 + y_M^2) - \{l^2 - d^2 - (x_M^2 + y_M^2)\}^2 \dots\dots\dots (30)$$

$$P = (Hx_M + Ky_M)(l^2 - d^2 + x_M^2 + y_M^2) - (Kx_M - Hy_M)\sqrt{Q} \quad \dots\dots\dots(31)$$

とおけば

$$\frac{d\delta}{d\theta} = \frac{-(x_M^2 + y_M^2)\sqrt{Q}}{P} \quad \dots\dots\dots(32)$$

となるので、式(22)～(29)の各値を求めることができる。よって式(21)より $d\varphi_1/d\theta$ を求めることができる。

3.4 従動節の角加速度

従動節の角加速度は $d^2\varphi_1/dt^2 = \omega_1^2 d^2\varphi_1/d\theta^2$ であるので式(21)を θ で微分して $d^2\varphi_1/d\theta^2$ を求めればよいのであるが、そのためにまず式(22)～(29)の各 D, F, G, M, N, J, H, K を θ で微分しておく必要がある。計算の結果次式が得られる。

$$\frac{dD}{d\theta} = 2(a^2 - b^2)(\cos^2\delta - \sin^2\delta) \frac{d\delta}{d\theta} \quad \dots\dots\dots(33)$$

$$\frac{dF}{d\theta} = -\frac{(a^2 - b^2 - c^2)}{E^2} \{ E(\cos^2\delta - \sin^2\delta) - F \sin\delta \cos\delta \} \frac{d\delta}{d\theta} \quad \dots\dots\dots(34)$$

$$\begin{aligned} \frac{dG}{d\theta} = & \frac{b}{A^2} \left[\frac{dA}{d\theta} (aF + bc \sin\delta) + A \left(a \frac{dF}{d\theta} + bc \cos\delta \frac{d\delta}{d\theta} \right) \right. \\ & \left. - \frac{dD}{d\theta} (aE - bc \cos\delta) - D \left(a \frac{dE}{d\theta} + bc \sin\delta \frac{d\delta}{d\theta} \right) - \frac{2GA}{b} \times \frac{dA}{d\theta} \right] \quad \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

$$\frac{dM}{d\theta} = (2G \sin\delta + R_T \cos\delta) \frac{d\delta}{d\theta} - \frac{dG}{d\theta} \cos\delta \quad \dots\dots\dots(36)$$

$$\frac{dN}{d\theta} = (2G \cos\delta - R_T \sin\delta) \frac{d\delta}{d\theta} + \frac{dG}{d\theta} \sin\delta \quad \dots\dots\dots(37)$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{d\theta} = & \frac{1}{a^4 y_T^2 + b^4 (c - x_T)^2} \left\{ M \frac{dy_T}{d\theta} + y_T \frac{dM}{d\theta} - N \frac{dx_T}{d\theta} + \right. \\ & \left. (c - x_T) \frac{dN}{d\theta} - 2J \left\{ a^4 y_T \frac{dy_T}{d\theta} - b^4 (c - x_T) \frac{dx_T}{d\theta} \right\} \right\} \quad \dots\dots\dots(38) \end{aligned}$$

$$\frac{dH}{d\theta} = \frac{dM}{d\theta} + a^2 b^2 r \left(\frac{dJ}{d\theta} \cos\beta - J \sin\beta \frac{d\beta}{d\theta} \right) \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$\frac{dK}{d\theta} = \frac{dN}{d\theta} + a^2 b^2 r \left(\frac{dJ}{d\theta} \sin\beta + J \cos\beta \frac{d\beta}{d\theta} \right) \quad \dots\dots\dots(40)$$

次に式(28), (29)を θ で微分すれば

$$\frac{d^2 x_M}{d\theta^2} = \frac{dH}{d\theta} \frac{d\delta}{d\theta} + H \frac{d^2 \delta}{d\theta^2}, \quad \frac{d^2 y_M}{d\theta^2} = \frac{dK}{d\theta} \frac{d\delta}{d\theta} + K \frac{d^2 \delta}{d\theta^2} \quad \dots\dots\dots(41), (42)$$

となり、 $d^2\delta/d\theta^2$ を求める必要がある。これには式(32)を θ で微分すればよいのであるが、それには Q, P を θ で微分しておく必要がある。式(30), (31)より

$$\frac{dQ}{d\theta} = 4 \left(x_M \frac{dx_M}{d\theta} + y_M \frac{dy_M}{d\theta} \right) \{ d^2 + l^2 - (x_M^2 + y_M^2) \} \quad \dots\dots\dots(43)$$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\theta} = & \left(x_M \frac{dH}{d\theta} + H \frac{dx_M}{d\theta} + y_M \frac{dK}{d\theta} + K \frac{dy_M}{d\theta} \right) (l^2 - d^2 + x_M^2 + y_M^2) \\ & + 2(Hx_M + Ky_M) \left(x_M \frac{dx_M}{d\theta} + y_M \frac{dy_M}{d\theta} \right) + \left(x_M \frac{dK}{d\theta} + \right. \\ & \left. K \frac{dx_M}{d\theta} - y_M \frac{dH}{d\theta} - H \frac{dy_M}{d\theta} \right) \sqrt{Q} + (Kx_M - Hy_M) \frac{1}{2\sqrt{Q}} \frac{dQ}{d\theta} \dots\dots\dots (44) \end{aligned}$$

となり、式(32)より

$$\frac{d^2\delta}{d\theta^2} = \frac{-1}{P} \left\{ 2\sqrt{Q} \left(x_M \frac{dx_M}{d\theta} + y_M \frac{dy_M}{d\theta} \right) + \frac{x_M^2 + y_M^2}{2\sqrt{Q}} \frac{dQ}{d\theta} + \frac{dP}{d\theta} \frac{d\delta}{d\theta} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

となり、これから式(41), (42)が求められる。よって式(21)より従動節の角加速度の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ は次式で求められる。

$$\frac{d^2\varphi_1}{d\theta^2} = \frac{1}{dl \sin \varphi_1} \left\{ \left(\frac{dx_M}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_M}{d\theta} \right)^2 + x_M \frac{d^2x_M}{d\theta^2} + y_M \frac{d^2y_M}{d\theta^2} - dl \cos \varphi_1 \left(\frac{d\varphi_1}{d\theta} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (46)$$

3.5 往き行程の始点と終点の角加速度

往き行程の始点と終点の角加速度は $\delta=0^\circ$, 180° の場合に以上に示した各式を計算して整理した結果次式のようになる。

$$\begin{aligned} \text{始点 } \delta=0^\circ, \quad \frac{d^2\varphi_1}{d\theta^2} &= \frac{(r+a-c)^2 \{b^2 - a(a-c)\}}{(b^2 + ar)dl \sin \varphi_0} \\ &= \frac{2(r+a-c)^2 \{b^2 - a(a-c)\}}{(b^2 + ar)\sqrt{4d^2l^2 - \{d^2 + l^2 - (r+a-c)^2\}^2}} \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{終点 } \delta=180^\circ, \quad \frac{d^2\varphi_1}{d\theta^2} &= \frac{(r+a+c)^2 \{b^2 - a(a+c)\}}{(b^2 + ar)dl \sin(\Psi + \varphi_0)} \\ &= \frac{2(r+a+c)^2 \{b^2 - a(a+c)\}}{(b^2 + ar)\sqrt{4d^2l^2 - \{d^2 + l^2 - (r+a+c)^2\}^2}} \dots\dots\dots (48) \end{aligned}$$

§ 4 揺動角の指定

従動節の角加速度を論ずる場合揺動角 Ψ が同一でなければならないので、 Ψ を指定した場合のカムの各寸法を計算する。式(14)を前報²⁾のようにして変形すれば

$$\begin{aligned} d^2 + l^2 - (r+a+c)^2 &= x, \quad d^2 + l^2 - (r+a-c)^2 = y \\ -2\{d^2 + l^2 - (r+a+c)^2\} \{d^2 + l^2 - (r+a-c)^2\} \cos \Psi &= 4d^2l^2 \sin^2 \Psi \dots\dots\dots (49) \end{aligned}$$

となるので、 $(r+a-c)^2 = x$, $(r+a+c)^2 = y$ とおけば上式は次のように y の 2 次式となる。

$$\begin{aligned} y^2 - 2y\{(d^2 + l^2)(1 - \cos \Psi) + x \cos \Psi\} + x^2 - 2(d^2 + l^2)(1 - \cos \Psi)x \\ + 2(d^2 + l^2)^2(1 - \cos \Psi) - 4d^2l^2 \sin^2 \Psi = 0 \end{aligned}$$

これから y を求めれば吟味の結果次式が得られる。

$$\begin{aligned} y = & \left\{ (d^2 + l^2)(1 - \cos \Psi) + x \cos \Psi + \sqrt{D} \right\} \dots\dots\dots (50) \\ D = & \sin^2 \Psi \{4d^2l^2 - (d^2 + l^2 - x)^2\} \end{aligned}$$

ただし $x = (r+a-c)^2$, $y = (r+a+c)^2$

$$r+a=\frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{x}), c=\frac{1}{2}(\sqrt{y}-\sqrt{x}) \dots\dots\dots(51)$$

よって Ψ, d, l および x すなわち $r+a-c$ を指定すれば y すなわち $r+a+c$ が求まるので、 $c, r+a$ が求められる。

§ 5 押 進 め 角

図1において従動節の円弧の中心 M 点における楕円の法線と AB の交点を P とすれば、 P は瞬間中心 I_{12} だから $\overline{AP} \omega_1 = \overline{BP} \omega_2$ すなわち $\overline{AP} d\theta/dt = \overline{BP} d\varphi_1/dt$ となり、 $\overline{AP} + \overline{BP} = d$ から

$$\overline{AP} = d \frac{d\varphi_1/d\theta}{1+d\varphi_1/d\theta}, \quad \overline{BP} = \frac{d}{1+d\varphi_1/d\theta} \dots\dots\dots(52)$$

が得られ、押進め角は図1において M 点における BM の垂線と MP のなす角だから、これを ϕ とすれば $\overline{BP} \sin \varphi_1 \tan \phi = l - \overline{BP} \cos \varphi_1$ が成立するので式(52)より次式が得られる。

$$\tan \phi = \frac{l(1+d\varphi_1/d\theta) - d \cos \varphi_1}{d \sin \varphi_1} \dots\dots\dots(53)$$

5.1 始点の押進め角とその指定

図1において往き行程の始点 C における押進め角を ϕ_c とすれば、始点においては $\varphi_1 = \varphi_0$ 、 $d\varphi_1/d\theta = 0$ となるので、式(53)と式(12)より

$$\tan \phi_c = \frac{l - d \cos \varphi_0}{d \sin \varphi_0} = \frac{l^2 - d^2 + (r+a-c)^2}{\sqrt{4d^2 l^2 - \{d^2 + l^2 - (r+a-c)^2\}^2}} \dots\dots\dots(54)$$

となる。次に始点の押進め角 ϕ_c を指定するために $\tan \phi_c = -\mu$ とおけば式(54)より

$$(1+\mu^2)(r+a-c)^4 - 2\{d^2 - l^2 + \mu(d^2 + l^2)\}(r+a-c)^2 + (1+\mu^2)(d^2 - l^2)^2 = 0$$

となり、 $(r+a-c)^2 = x$ だから x の2次式となり吟味の結果次式が得られる。

$$x = (r+a-c)^2 = \frac{1}{1+\mu^2} \{ (d^2 - l^2) + \mu^2(d^2 + l^2) - 2\mu l \sqrt{d^2(1+\mu^2) - l^2} \}$$

$$\text{あるいは } \sqrt{x} = (r+a-c) = -\frac{\mu l}{\sqrt{1+\mu^2}} + \sqrt{d^2 - \frac{l^2}{1+\mu^2}} \dots\dots\dots(55)$$

よってカムの Ψ, d, l と μ が指定されれば x すなわち $r+a-c$ が求まるので、式(50)、(51)より $r+a, c$ が決定される。

§ 6 滑り率と曲率半径

カムと従動節の滑り率 σ_1, σ_2 は円弧半径を r とし、接触点 T の曲率半径を ρ_T とすれば前報²⁾より

$$\sigma_1 = \frac{\rho_T + r}{\rho_T} \frac{\overline{TP}}{r + \overline{TP}}, \quad \sigma_2 = \frac{\rho_T + r}{r} \frac{\overline{TP}}{\rho_T - \overline{TP}} \dots\dots\dots(56), (57)$$

である。図1の $\triangle PMB$ において余弦の定理より $\overline{MP} = \overline{TP} + r$ 、 $\overline{BP} = d/(1+d\varphi_1/d\theta)$ から

$$\overline{TP} = \left\{ \left(\frac{d}{1+d\varphi_1/d\theta} \right)^2 + l^2 - 2l \left(\frac{d}{1+d\varphi_1/d\theta} \right) \cos \varphi_1 \right\}^{\frac{1}{2}} - r \dots\dots\dots(58)$$

である。次に ρ_T は楕円の曲率半径であるので ρ_T は次式

$$\rho_T = \frac{\left\{ \left(\frac{dx_T}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy_T}{d\theta} \right)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2x_T}{d\theta^2} \frac{dy_T}{d\theta} - \frac{d^2y_T}{d\theta^2} \frac{dx_T}{d\theta}} \quad (59)$$

により求められるので、これに式(25), (26)とその微分

$$\frac{d^2x_T}{d\theta^2} = \frac{dM}{d\theta} \frac{d\delta}{d\theta} + M \frac{d^2\delta}{d\theta^2}, \quad \frac{d^2y_T}{d\theta^2} = \frac{dN}{d\theta} \frac{d\delta}{d\theta} + N \frac{d^2\delta}{d\theta^2} \quad (60), (61)$$

と式(36), (37), (35)を代入すれば

$$\rho_T = \frac{(M^2 + N^2)^{\frac{3}{2}}}{R_T^2 - LR_T + 2G^2}, \quad \text{ただし} \quad L = \frac{dG/d\theta}{d\delta/d\theta} \quad (62)$$

となるので、式(58), (62)を式(56), (57)に代入して σ_1, σ_2 を求めることができる。

6.1 カム上の各点の滑り率

楕円カム上の各点, C, D, E, F の滑り率を $\sigma_{1C}, \sigma_{1D}, \sigma_{1E}, \sigma_{1F}$ とすれば C 点においては $\sigma_T = b^2/a$, $\overline{TP} = a - c$ から式(56)より次式が得られる。

$$\sigma_{1C} = \frac{b^2 + ar}{b^2} \cdot \frac{a - c}{r + a - c} \quad (63)$$

E 点においては $\rho_T = b^2/a$, $\overline{TP} = a + c$ から

$$\sigma_{1E} = \frac{b^2 + ar}{b^2} \cdot \frac{a + c}{r + a + c} \quad (64)$$

が得られ、計算の結果 $\sigma_{1E} > \sigma_{1C}$ となるので $a > b$ のときは σ_{1E} の値を指定する方がよい。

D 点において図 2(a)より $\angle MAB = \alpha$, $\angle MAO = \beta$ とすれば σ_{1D} は次式のようにになる。

$$\sigma_{1D} = \frac{a^2 + br}{a^2} \cdot \frac{b - c \tan(\beta - \alpha)}{r + b - c \tan(\beta - \alpha)} \quad (65)$$

ただし

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{d^2 - l^2 + c^2 + (b+r)^2}{2d\sqrt{c^2 + (b+r)^2}}, \quad \beta = \tan^{-1} \frac{b+r}{c}$$

F 点において図 2(b)より次式が得られる。 α, β は式(65)と同じである。

$$\sigma_{1F} = \frac{a^2 + br}{a^2} \cdot \frac{b + c \tan(180^\circ - \alpha - \beta)}{r + b + c \tan(180^\circ - \alpha - \beta)} \quad (66)$$

$a > b$ の場合 σ_{1E} を指定すれば式(63)から

$$b = \left\{ \frac{ar(a+c)}{(r+a+c)(\sigma_{1E}-1)+r} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (67)$$

が得られるので、 Ψ, d, l, μ が指定されれば $r+a, c$ が前述により求まるので、 σ_{1E} と r を指定すれば式(67)より b を求めることができる。

§ 7 始点と終点の等角加速度

往き行程の始点と終点すなわち $\delta = 0^\circ, 180^\circ$ の C, E 点の角加速度の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ は式(47), (48)から

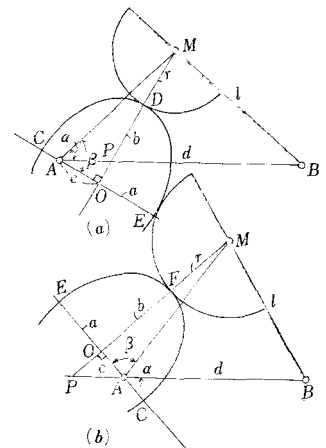


図 2(a)(b) D, F 点の接触

求められるので、これらの絶対値を等しいとおけば

$$\frac{(r+a-c)^2 \{b^2 - a(a-c)\}}{\sin \varphi_0} = - \frac{(r+a+c)^2 \{b^2 - a(a+c)\}}{\sin(\Psi + \varphi_0)}$$

となる。これから b とこの場合の $|d^2\varphi_1/d\theta^2|$ を求めれば次式のようなになる。

$$b = \sqrt{a \times \frac{(a-c)(r+a-c)^2 \sin(\Psi + \varphi_0) + (a+c)(r+a+c)^2 \sin \varphi_0}{(r+a-c)^2 \sin(\Psi + \varphi_0) + (r+a+c)^2 \sin \varphi_0}} \quad (68)$$

$$\left| \frac{d^2\varphi_1}{d\theta^2} \right| = \frac{2c(r+a+c)^2(r+a-c)^2}{dl \{ (r+a-c)^3 \sin(\Psi + \varphi_0) + (r+a+c)^3 \sin \varphi_0 \}} \quad (69)$$

7.1 等角加速度で σ_{1E} を指定した場合

式(67)の b を式(68)に代入して r を求めれば、

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{y}(\sigma_{1E}-1)U}{\sqrt{y}W\sigma_{1E}-U}, \quad \sqrt{x}=r+a-c, \quad \sqrt{y}=r+a+c \\ W &= x \sin(\Psi + \varphi_0) + y \sin \varphi_0, \quad U = x^{\frac{3}{2}} \sin(\Psi + \varphi_0) + y^{\frac{3}{2}} \sin \varphi_0 \\ \cos(\Psi + \varphi_0) &= \frac{d^2 + l^2 - y}{2dl}, \quad \cos \varphi_0 = \frac{d^2 + l^2 - x}{2dl} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

となる。 Ψ, d, l, μ が指定されれば式(55), (50)から x, y が求まるので σ_{1E} を指定すれば等角加速度の場合式(70)より r が求まり、式(51)より a, c , 式(67)より b を求めることができる。

7.2 計 算 例

図3は往き行程の始点と終点が等角加速度で $\Psi=20^\circ, d=1, \mu=0.1, \sigma_{1E}=1.2$ の場合の各 l に対する a, b, c, r および始点の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ を求めたもので、 b は a より僅かに大きく、 l の増すにつれ共に減少し、 c は増し、 r は減少する。 $d^2\varphi_1/d\theta^2$ は l が0.8より大になると急に減少する。

図4は $\Psi=20^\circ, \mu=0.1, d=1, l=0.7, 0.8, 0.9$ の場合の各 σ_{1E} に対する a, r の値を求めたもので、 σ_{1E} が増すと a は減少するが r が増す。 l が大きい程 a, r は減少する。

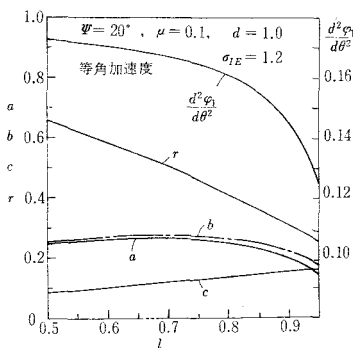


図3 等角加速度で $\Psi, d, l, \mu, \sigma_{1E}$ を指定したときの $a, b, c, r, d^2\varphi_1/d\theta^2$

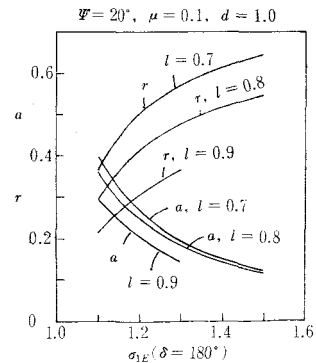


図4 等角加速度で Ψ, d, l, μ を指定し、 σ_{1E} を変化させたときの a, r

図5は $\Psi=20^\circ, d=1, \mu=0.1, \sigma_{1E}=1.2, l=0.8, 0.9$ の場合の $\delta=0^\circ \sim 360^\circ$ の $\phi, d^2\varphi_1/d\theta^2$ と σ_1 の一部を求めたもので、 l が大きいと ϕ_{max} は大となり、始点の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ は小さいが、途中のそれが大となる。 σ_1 は余り変らない。式(16)~(19)より各 θ_0, θ_r が求められる。

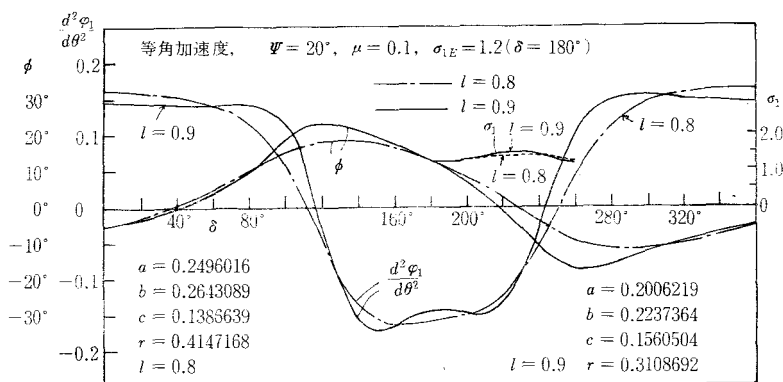


図5 $\Psi = 20^\circ$, $\mu = 0.1$, $\sigma_{1E} = 1.2$, $l = 0.8, 0.9$ の等角加速度の ϕ , σ_1 , $d^2\phi/d\theta^2$

図6は円弧従動節上に $l = 0.8$ の場合の従動節の滑り率 σ_2 を押進め角 ϕ によって描いたもので接触の両端で $\sigma_2 = \infty$ となることがわかる。

§ 8 行き行程と戻り行程のカムの等回転角

行き行程と戻り行程のカムの回転角 θ_o , θ_r は式(18), (19)で求められるが, $\theta_o = \theta_r = 180^\circ$ とすれば式(16), (17)より

$$180^\circ = \cos^{-1} \frac{d^2 - l^2 + (r + a + c)^2}{2d(r + a + c)} - \cos^{-1} \frac{l^2 - d^2 - (r + a - c)^2}{2d(r + a - c)} \quad (71)$$

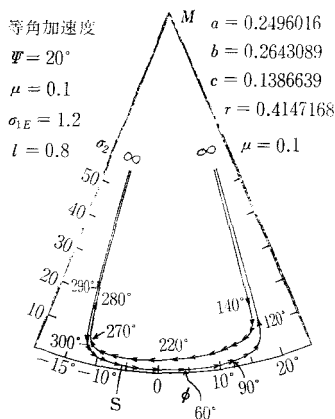


図6 従動節上の σ_2

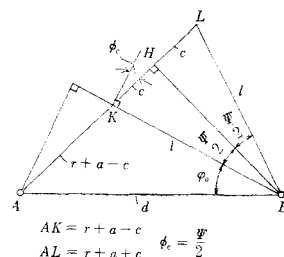


図7 両行程のカムの等回転角

となり, これを整理すれば次式が得られる。

$$d^2 - l^2 = (r + a - c)(r + a + c) = \sqrt{xy} \quad (72)$$

これを式(54)に代入し, $\tan \phi_c = -\mu$ とおけば

$$d^2 + l^2 = \frac{1}{2\mu^2} \{ (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 + \mu^2(x + y) \} \quad (73)$$

となるので, 式(72)より次式が得られる。

$$d^2 = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 + \mu^2(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4\mu^2}, \quad l^2 = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})^2(1 + \mu^2)}{4\mu^2} \quad (74), (75)$$

これらを式(49)に代入すれば

$$\left(\tan \frac{\Psi}{2} - \mu\right) \left(\tan \frac{\Psi}{2} - \frac{r+a}{c} \mu\right) = 0 \quad (76)$$

となるが、 $\tan \frac{\Psi}{2} \neq \frac{r+a}{c} \mu$ なので

$$\mu = \tan \frac{\Psi}{2}, \quad \phi_c = -\frac{\Psi}{2}, \quad \theta_o = \theta_r = 180^\circ \quad (77)$$

が得られる。これは又 $\theta_o = \theta_r = 180^\circ$ の場合図7の作図が得られることから、 $\mu = \tan \Psi/2$ が得られる。

8.1 計算例

前計算例において $\Psi = 20^\circ$ の場合を取扱ったが、ここでは $\Psi = 30^\circ$ で往き行程の両端の等角加速度の場合の $d=1$, $l=0.7$, $\sigma_{1E}=1.2$ で $\mu=0.1$ と $\theta_o = \theta_r = 180^\circ$ になる $\mu = \tan \Psi/2 = \tan 15^\circ = 0.2679492$ の場合について式(55)より $r+a-c$, 式(56)より $r+a+c$, 式(51)より $r+a$, c , 式(70)より r を式(67)より b を求めれば、図7の図中に示される a, b, c, r の値が得られるので、これにより各 δ に対する ϕ , $d^2\phi_1/d\theta^2$, σ_1 を求めたものを図7に示す。

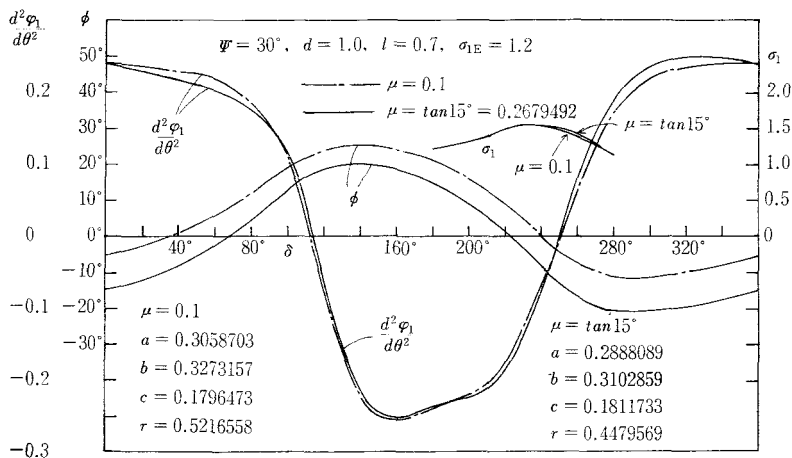


図8 $\Psi = 30^\circ$, $d=1$, $l=0.7$, $\sigma_{1E}=1.2$ の場合の $\mu=0.1$ と $\tan 15^\circ$ の ϕ , $d^2\phi_1/d\theta^2$, σ_1 の比較

図から $\mu = \tan \Psi/2$ の場合の方が $\mu = 0.1$ の場合よりも最大押進め角が小で、しかも最大押進め角の絶対値が小となり、都合がよい。また $d^2\phi_1/d\theta^2$ については殆んど変わらず、カムの最大滑り率 σ_1 も変わらないので μ を大きくする方が押進め角について有利であることがわかる。図5, 7からわかるように図1に示すカムの回転方向の場合 $\theta_o \leq \theta_r$ なので $\theta_o > \theta_r$ にするためにはカムを逆に回転せねばならない。

§ 9 始点の角加速度が零の場合

往き行程の始点 C の $d^2\phi_1/d\theta^2 = 0$ とする場合は式(47)より

$$b = \sqrt{a(a-c)} \quad (78)$$

となるので、 $b < a$ となる。よって往き行程の終点 E を過ぎた所で σ_1 は最大となるので、 σ_{1E} を指定すれば、式(64)の b を式(78)に代入して

$$(a-c)(r+a+c)\sigma_{1E}=(a-c+r)(a+c)$$

となるので、これに $r+a-c=\sqrt{x}$, $r+a+c=\sqrt{y}$ と式(51)を代入して a を求めれば

$$a = \frac{(\sqrt{y}-\sqrt{x})(\sqrt{y}\sigma_{1E}+\sqrt{x})}{2(\sqrt{y}\sigma_{1E}-\sqrt{x})}$$

$$= \frac{c\{(r+a+c)\sigma_{1E}+r+a-c\}}{(r+a+c)\sigma_{1E}-(r+a-c)} \dots\dots\dots (79)$$

が得られ、式(51)から $r+a=(\sqrt{x}+\sqrt{y})/2$ なので、 r を求めれば、 r は次式のようになる。

$$r = \frac{\sqrt{x}\sqrt{y}(\sigma_{1E}-1)}{\sqrt{y}\sigma_{1E}-\sqrt{x}} \dots\dots\dots (80)$$

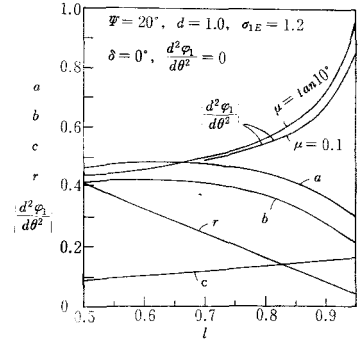


図9 $\delta=0^\circ$, $d^2\varphi_1/d\theta^2=0$ の場合の Ψ , d , σ_{1E} を指定したときの各 l に対する a, b, c, r , $|d^2\varphi_1/d\theta^2|$

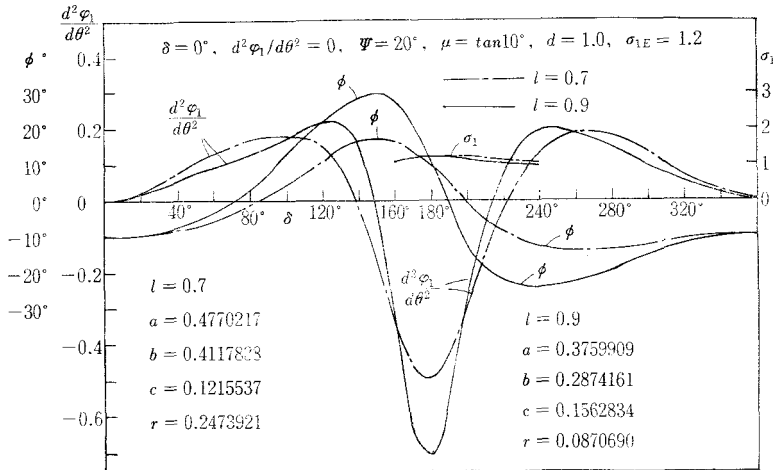


図10 $\delta=0^\circ$, $d^2\varphi_1/d\theta^2=0$ の場合、 l の変化による ϕ , σ_1 , $d^2\varphi_1/d\theta^2$

よって、 $\Psi, \mu, d, l, \sigma_{1E}$ が指定された場合 a, b, c, r および終点の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ を求めるには式(55)より \sqrt{x} , 式(50)より \sqrt{y} , 式(51)より $r+a, c$ を求め、式(79), (80)より a, r , 式(78)より b , 式(48)より $d^2\varphi_1/d\theta^2$ を求めればよい。

図9は $\Psi=20^\circ$, $\delta=0^\circ$ の $d^2\varphi_1/d\theta^2=0$ の場合の $d=1$, $\mu=\tan 10^\circ=0.176327$, $\sigma_{1E}=1.2$ を指定し、各 l に対する a, b, c, r と終点の $|d^2\varphi_1/d\theta^2|$ を求めたものである。 l の増加に伴って $d^2\varphi_1/d\theta^2$ が急増加することに注意されたい。

図10は同じデータで $l=0.7, 0.9$ の場合の a, b, c, r を求めそれによる ϕ , $d^2\varphi_1/d\theta^2$ と σ_1 の一部を示す。 l が大きい方が ϕ_{max} も終点の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ も共に大で σ_1 は余り変わらないので l が小さい方がよい。

図11は $l=0.7$ の場合の従動節上の σ_2 を示す。接触の両端だけでなく、行程の途中で、この場合始点で $\sigma_2=\infty$ となる。

§ 10 終点の角加速度が零の場合

往き行程の終点の角加速度が零の場合は式(48)より

$$b = \sqrt{a(a+c)} \dots\dots\dots (81)$$

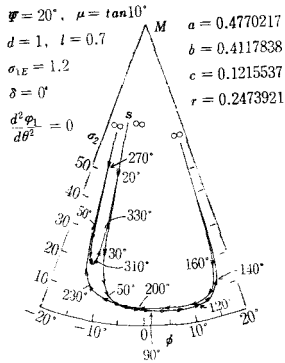


図11 $\delta=0^\circ$, $d^2\varphi_1/d\theta^2=0$ の場合の従動節上の σ_2

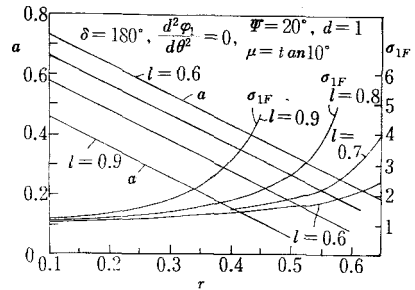


図12 $\delta=180^\circ$, $d^2\varphi_1/d\theta^2=0$ の場合の Ψ , d , μ , l を指定し各 r に対する a , σ_{1F}

となり、 $b > a$ となる。この場合は図1のカムのF点付近の滑り率 σ_1 が最大となり、 σ_{1F} は式(66), (65)より求められるが、これに式(81)を代入して a を求めることは困難なので、 μ, Ψ, d, l が指定された場合式(55)より \sqrt{x} , 式(50)より \sqrt{y} , 式(51)より $r+a$, c が求まるので、 r を指定すれば a が求められ、式(81)より b が求まり、式(66), (65)より σ_{1F} を求めることができる。

図12は $\Psi=20^\circ$, $\mu=\tan 10^\circ=0.176327$, $d=1$, $l=0.6\sim 0.9$ を指定して各 r に対する a と σ_{1F} を求めたものである。なお式(47)の始点の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ の式に式(81)の b を代入すれば

$$\delta=0^\circ, \frac{d^2\varphi_1}{d\theta^2} = \frac{4cx}{\sqrt{y}\sqrt{4d^2l^2 - (d^2 + l^2 - x)^2}} \quad (82)$$

となるので r によって変らない。各 l に対する c と $d^2\varphi_1/d\theta^2$ を表1に示す。図から r の増加により a は減少し、 σ_{1F} はある点で急増する。この図から $\sigma_{1F} \approx 1.2$ を選んだ場合の a, b, c, r を表1に示す。

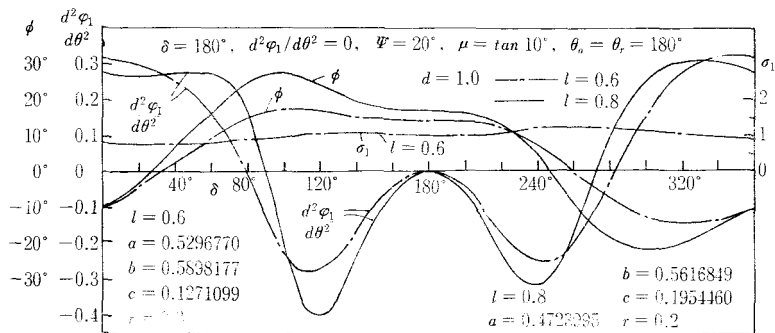


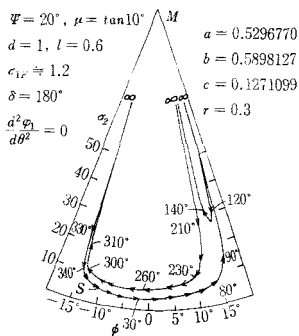
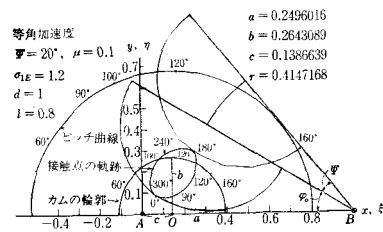
図13 終点の角加速度が零で $\Psi=20^\circ$, $\mu=\tan 10^\circ$, $d=1$, $l=0.6, 0.8$ の ϕ , σ_1 , $d^2\varphi_1/d\theta^2$

図13は表1より $l=0.6, 0.8$ を選んだ場合の ϕ , σ_1 , $d^2\varphi_1/d\theta^2$ を δ を横軸に示す。 l が大きい場合は押進め角 ϕ がかなり大きくなり、始点の $d^2\varphi_1/d\theta^2$ は小さくても途中のそれが大となる。 σ_1 については余り変らない。これは $\sigma_{1F}=1.2$ を指定したためである。図の場合 $l=0.6$ かそれより少し大きい場合が ϕ , $d^2\varphi_1/d\theta^2$ について良好である。よってこの場合も l が小さい方がよい。

図14は図13の $r=0.3$ の場合の σ_2 を従動節の円弧上に示したもので、接触の両端と途中で $\sigma_2=\infty$ を生ずる。図6に比して σ_2 に関して良くない。

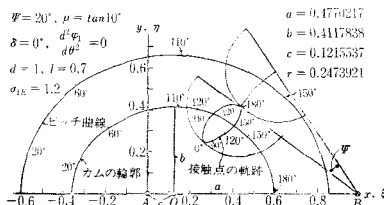
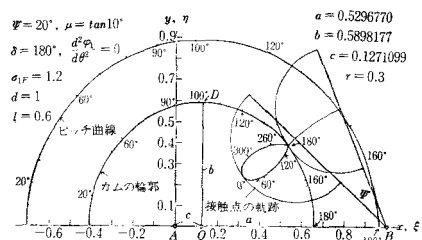
表1 終点の角加速度が零のとき, $\Psi=20^\circ$, $\mu=\tan 10^\circ$, $d=1$, $\sigma_{1F}=1.2$

l	a	b	c	r	始点 $d^2\varphi_1/d\theta^2$
0.6	0.5296770	0.5898177	0.1271099	0.30	0.3159215
0.7	0.5105992	0.5841686	0.1577391	0.25	0.3004234
0.8	0.4723995	0.5616849	0.1954860	0.20	0.2726773
0.9	0.4229317	0.5319568	0.2461551	0.13	0.2132422

図14 図13の従動節上の σ_2 図15 等角加速度 $\Psi=20^\circ$ のカムの輪郭, ピッチ曲線と接触点の軌跡

§ 11 カムの輪郭とピッチ曲線と接触点の軌跡

カムの輪郭は x_T , y_T で表わされるので, 式(3), (2) で求められる。カムのピッチ曲線は M 点の x y 座標 x_M , y_M で表わされるので式(6), (7), (8)で求められる。

図16 図10の $l=0.7$ のカムの輪郭, ピッチ曲線, 接触点の軌跡図17 図13の $l=0.6$ のカムの輪郭, ピッチ曲線, 接触点の軌跡

接触点の軌跡は T 点の ξ η 座標 ξ_T , η_T で表わされるので, 図1より

$$\xi_T = x_T \cos \theta - y_T \sin \theta, \quad \eta_T = x_T \sin \theta + y_T \cos \theta \quad (83)$$

となるので式(2), (10)より求められる。

図15は図5の $l=0.8$ のときの, 図16は図10の始点の角加速度が零の場合の $l=0.7$ のときの, 図17は図13の終点の角加速度が零の場合の $l=0.6$ のときのカムの輪郭, ピッチ曲線, 接触点の軌跡と従動節の行程の始点と終点の位置を示す。いずれもカムとして良好である。

§ 12 結 論

以上によりこの種のカムについて次の結論を得た。(1)揺動偏心正楕円カムの円弧従動節の運動, 押

進め角と滑り率が解析された。(2)両行程の始点と終点の角加速度と両行程のカムの回転角が求った。(3)往き行程の始点の押進め角，従動節の揺動角，カムの最大滑り率と楕円の長軸の両端の角加速度を指定すればカムの寸法を決定できる。(4)揺動角の半分を往き行程の始点の負の押進め角にすれば往き行程の最大押進め角を最小にできる。(5)従動節の長さは等角加速度の場合は長い方が，始点か終点の角加速度が零の場合は短かい方が最大加速度について良好である。(6)往き行程の終点か，戻り行程の中間のカムの滑り率を指定すればカムの滑り率を低く保てるが従動節の滑り率は接触の両端で無限大となる。

次報において平板従動節の場合を論ずる。

文 献

- 1) 糸島寛典：往復偏心正楕円カムの研究（第1報）—円弧従動節—，呉高専研究報告，12—1（1976）45
- 2) 糸島寛典：揺動偏心楕円カムの研究（第1報）—円弧従動節—，呉高専研究報告，11—2（1976）13

（昭和51年11月1日受付）

非線形フィードバック要素をもつゼロ・メモリ型非定常システムの任意不規則応答分布に関する実験的研究

(電気工学科) 広 光 清 次 郎

(広島大学) 太 田 光 雄

An Experimental Study of the Output Probability to a Zero-Memory Time-Variant System with a Non-linear Feedback Element and an Arbitrarily Distributed Random Excitation

(Dept. Elect. Engrg.) Seijiro HIROMITSU

(Hiroshima Univ.) Mitsuo OHTA

In the previous paper, a unified theory of the statistical treatment for the output probability distribution has been introduced in the case when a general class of random process is passed through a time-variant system of zero-memory (memoryless) type with a non-linear feedback element. This paper provides an experimental study in view of the arbitrariness of the input characteristics, the possible variety of non-linear element and fluctuation forms of system parameters, and the complexity of mathematical treatment involved. The experimental results by means of digital simulation clearly show the validity and legitimacy of the theoretical expressions.

§ 1 緒 言

通常、制御システムや振動システムの内存在する非線形特性は2種類に分類できる。すなわち、避けることのできないものと、わざとそう入るものである¹⁾。変調や復調、整流器やたいていの発振器、また車輛の振動制御に用いるストッパーなども、何らかの目的・対策のための人為的な拘束を別途付加する後者の代表的な例となっている。一方、避けることのできない非線形性の最も普通の例は飽和である。バネなどにみられる、硬いバネ特性や軟いバネ特性も前者の例である。この避けられない非線形性について理解を深めようと技術者が努力するのはいうまでもなく、できればこの特性をもっとうまく処理したいと考えるからであろう。しかし、線形性の優美さを捨てて、意識的に非線形要素を加えたシステムの設計についての研究がかなり現われるようになったそのうらには、線形システムが非線形システムより優れているのはごく限られた場合しかないという事実がある。

一般に、不可避的であれ人為的であれ、これらの付加的な非線形機能を考慮した全体としてのシステムは、基本的に、フィードバック経路中にゼロ・メモリ形非線形要素が位置した非線形フィードバックシステムとして表現されうる²⁾。たとえば、Duffing の非線形微分方程式で記述される振動システム：

$$M\ddot{z}(t) + R\dot{z}(t) + Kz(t) + f(z(t)) = x(t) \quad \dots\dots\dots(1)$$

は、弾性特性における付加的非線形機能がフィードバック径路中に位置し、メモリーをもつ線形要素が前向き径路中に現われる、Fig. 1 のブロック・ダイアグラムで表現することもできる。更に(1)式において、摩擦項にも非線形性を含む次のような場合：

$$\ddot{z}(t) + r\dot{z}(t) + g(\dot{z}(t)) + kz(t) + f(z(t)) = x(t) \quad \dots\dots\dots(2)$$

状態空間法でアナログ・シミュレーションすると、Fig. 2 のようになる。 $f(z_1)$, $g(z_2)$ を含むパスは、いわゆる状態フィードバックとみなせよう。最適制御システムのシンセシス問題においても、最適制御信号は制御対象に対応した随伴システムの状態変数の非線形切り換えによって発生され、閉ループを形成するようになるのも周知の事実である³⁾。

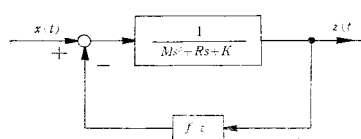


Fig. 1 Duffing の非線形微分方程式： $M\ddot{z} + R\dot{z} + Kz + f(z) = x$ で与えられる振動システム ((1)式参照)。

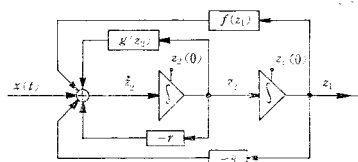


Fig. 2 (2)式： $\ddot{z} + r\dot{z} + g(\dot{z}) + kz + f(z) = x$ のアナログ・シミュレーション図 ($z_1 = z$, $z_2 = \dot{z}_1$)。

前報告において筆者らは、非線形システムにおける非線形機能の本質は、N. Wiener の示唆をまづまでもなく、時間効果より振幅効果としてのゼロメモリー機能に着目してこそより浮き彫りになるうとの観点から、第1段階の研究として、まず、ゼロメモリー型の非線形システムにのみ考察の焦点をおき、統計処理方法を発表した⁵⁾。本報告は、その理論表示の正当性に実験的立場から保証を与えようとするものである。すなわち、閉ループとしてのフィードバック径路中に含まれる非線形要素、前向き径路中のゲイン要素の大きさ、システムに印加される入力分布形状、システム・パラメータの変動形態などに様々な任意性許されることや、その統計処理方法の複雑さなどから、本実験的研究には、デジタル・シミュレーションが不可欠であるとしてこれを用いた。その果結、実験的確認に供したいずれの場合においても、理論と実験の妥当な一致性を認めることができた。

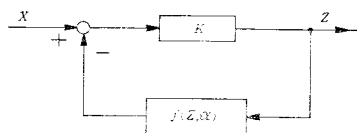


Fig. 3 非線形フィードバック要素をもつゼロ・メモリー型時変システム

§ 2 理論の要約

まず、前報告で得られた結果の理論表示を要約しておこう⁵⁾。

今、Fig. 3 に示すゼロ・メモリー型非線形・非定常フィードバックシステムに着目しよう。ここで、フィードバック径路中のパラメータ $\alpha (= \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\})$ および前向き径路中のゲイン K は任意の変動形態で(すなわち、非白色・非ガウス確率過程にしたがって)揺らいでもよいものとする。このシステムに任意の(非白色・非ガウス確率過程にしたがう)定常不規則入力 $X(t)$ が印加された場合、その出力 $Z(t)$ は容易に次のように表示される。

$$Z = K(X - f(Z, \alpha)) \quad \dots\dots\dots(3)$$

問題の中心は、非線形フィードバック機能によるシステムの出力応答 Z の確率密度関数 $P(Z)$ に対する影響を、前向き線形ゲイン要素のみによる出力応答分布（すなわち、Fig. 3 でフィードバックを除去したときの出力分布）との関連において具体的に調べることである。

新たに導入した統計的 Lagrange 展開型手法によって導出した、無次元化 $Y = (Z - \mu)/\sigma$, μ, σ は任意定数）に関する確率密度関数 $P(Y)$ と累積分布関数 $Q(Y)$ の結果のみ示せば、それぞれ、次のとおりである。

$$P(Y) = |\sigma| \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \middle| K, \alpha \right) >_{K, \alpha} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|\sigma|}{\sigma^n} \frac{d}{dY} \left\langle \frac{K^n}{K} \right\rangle \{ f(\sigma Y + \mu, \alpha) \}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \middle| K, \alpha \right) >_{K, \alpha} \dots \dots (4)$$

$$Q(Y) = |\sigma| \int_{-\infty}^Y \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \middle| K, \alpha \right) >_{K, \alpha} dY \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|\sigma|}{\sigma^n} \left\langle \frac{K^n}{K} \right\rangle \{ f(\sigma Y + \mu, \alpha) \}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \middle| K, \alpha \right) >_{K, \alpha} \dots \dots (5)$$

ここに $P_X(\cdot | K, \alpha)$ は、本来、 K および α が一定とみなされる局所的定常時において、不規則入力 $X(t)$ 自身がもつ条件付き分布形の変数 X の位置に単に $(\sigma Y + \mu)/K$ を代入したものである点、特に留意を要する。

さて、通常の時変システムにおいては、入力の不規則変動とシステムのパラメータ変動とは互に独立であり、この場合、 Y に関する確率密度および累積分布表示は (4), (5) 式からただちに次のように与えられる。

$$P(Y) = |\sigma| \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) >_{K, \alpha} \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|\sigma|}{\sigma^n} \frac{d}{dY} \left\langle \frac{K^n}{K} \right\rangle \{ f(\sigma Y + \mu, \alpha) \}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) >_{K, \alpha} \dots \dots (6)$$

$$Q(Y) = |\sigma| \int_{-\infty}^Y \left\langle \frac{1}{K} \right\rangle P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) >_{K, \alpha} dY \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|\sigma|}{\sigma^n} \left\langle \frac{K^n}{K} \right\rangle \{ f(\sigma Y + \mu, \alpha) \}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) >_{K, \alpha} \dots \dots (7)$$

(4)~(7) 式における展開初項は、Fig. 3 でフィードバック径路を除去したときの前向き径路のみの伝達にもとづく出力応答分布が位置しており、システム全体として、非線形フィードバック機能を付加したことによる効果は、第 2 項以下の各展開項の内に階層的な姿で反映されている。したがって、出力分布形状に関して、閉ループ出力分布特性からの変化に特に着目して論じたいときは、 $Q(Y)$ 自身よりも、次の表示：

$$\varepsilon(Y) = Q(Y) - ((7) \text{ 式の展開初項}) \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{|\sigma|}{\sigma^n} \left\langle \frac{K^n}{K} \right\rangle \{ f(\sigma Y + \mu, \alpha) \}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) >_{K, \alpha} \dots \dots (8)$$

を考察するのが有効となろう。

システム・パラメータが時間とともに変動しない場合の $P(Y)$, $Q(Y)$, $\varepsilon(Y)$ 表示は、(6)~(8) 式で平均記号 $\langle \cdot \rangle$ をすべて除去した次のような表示になることはいうまでもない。

$$P(Y) = \left| \frac{\sigma}{K} \right| P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \frac{\sigma}{K} \right| \frac{K^n}{\sigma^n} \frac{d}{dY} \left[\{f(\sigma Y + \mu, \alpha)\}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) \right] \dots (9)$$

$$Q(Y) = \left| \frac{\sigma}{K} \right| \int_{-\infty}^Y P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) dY + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \frac{\sigma}{K} \right| \frac{K^n}{\sigma^n} \{f(\sigma Y + \mu, \alpha)\}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) \dots (10)$$

$$\varepsilon(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left| \frac{\sigma}{K} \right| \frac{K^n}{\sigma^n} \{f(\sigma Y + \mu, \alpha)\}^n \frac{d^{n-1}}{dY^{n-1}} P_X \left(\frac{\sigma Y + \mu}{K} \right) \dots (11)$$

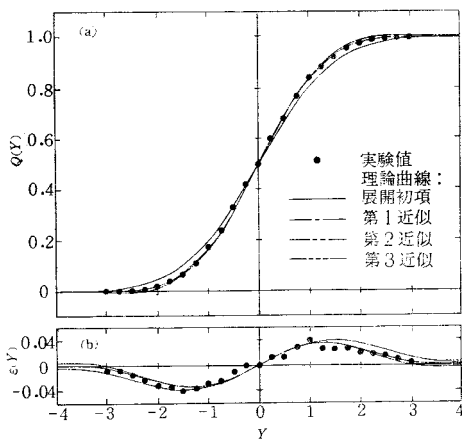


Fig. 4 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = 0.25Z + 0.25Z^3$, X : ガウス分布. (a) $Q(Y)$, (b) $\varepsilon(Y)$.

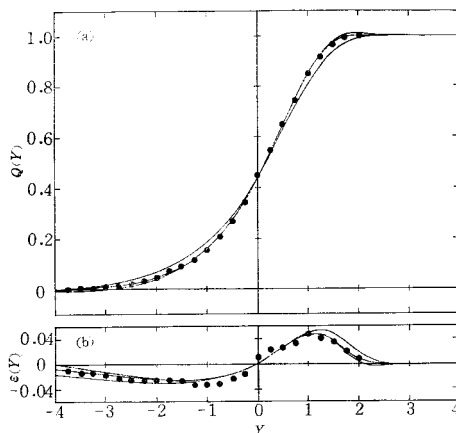


Fig. 5 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = 0.25Z + 0.25Z^3$, X : 対数指数分布. (a) $Q(Y)$, (b) $\varepsilon(Y)$.

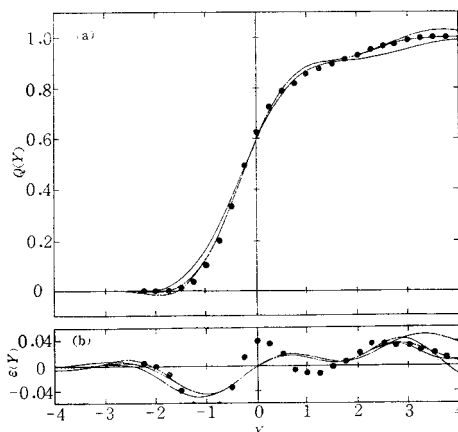


Fig. 6 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = 0.25Z + 0.25Z^3$, X : グラムシャリエ分布. (a) $Q(Y)$, (b) $\varepsilon(Y)$.

§ 3 デジタル・シミュレーション

本実験的考察においては、上述の理論的指針にもとづいて、フィードバック経路中の非線形機能としてはさまざまなものが考えられること、不規則入力やシステム・パラメータは白色・ガウス過程はもちろんのこと、非白色・非ガウス過程にしたがって揺らいでもよいこと、結果の数学的表示やこれに対する統計処理を十分精度ある姿で計算したいことなどから、実験的なシミュレーションはもちろん、理論的分布曲線の算出においてもデジタル計算機の利用が不可欠となる。

具体的には、以下で述べる数種の不規則入力波や、不規則に変動するシステム・パラメータを乱数発生によって模擬形成させ、また計算機上に各種の非線形フィードバック・システムを模擬して、その不規則応答波に関して理論と実験の比較検討を行った。

§ 3.1 シミュレーションのための不規則入力波のモデル

(a) ガウス分布形モデル

これは、統計的システム解析においてしばしば仮定される、対称性・局在性を示す代表的な例としてとり上げた。実際の不規則入力波は、ガウス乱数を規準化して次の確率密度関数をもつものを作成した。

$$P_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{X^2}{2} \right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

$P_X(X)$ の各逐次導関数はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} P_X^{(1)}(X) &= P_X(X)(-X) \\ P_X^{(2)}(X) &= P_X(X)(-1+X^2) \\ P_X^{(3)}(X) &= P_X(X)(3X-X^3) \\ P_X^{(4)}(X) &= P_X(X)(3-X^2+X^4) \quad \dots\dots\dots (13) \\ P_X^{(5)}(X) &= P_X(X)(-15X+10X^3-X^5) \\ P_X^{(6)}(X) &= P_X(X)(-15+45X^2-15X^4+X^6) \\ P_X^{(7)}(X) &= P_X(X)(105X-105X^3+21X^5-X^7) \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

(b) 対数指数分布形モデル

このモデルは、確率密度関数：

$$P_X(X) = \exp \{X - \exp \{X\}\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

をもつ、非対称・単峰性の分布であり、その累積分布関数は次式で与えられる。

$$\int_{-\infty}^X P_X(X) dX = 1 - \exp \{-\exp \{X\}\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

このような乱数モデルは、区間 $[0, 1]$ で一様分布する矩形乱数 u_i を用いて、

$$X_i = \log \{-\log u_i\} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad \dots\dots\dots (16)$$

なる非線形変換から発生することができる。また、その逐次導関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 P_X^{(1)}(X) &= P_X(X)(1 - e^X) \\
 P_X^{(2)}(X) &= P_X(X)(1 - 3e^X + e^{2X}) \\
 P_X^{(3)}(X) &= P_X(X)(1 - 7e^X + 6e^{2X} - e^{3X}) \\
 P_X^{(4)}(X) &= P_X(X)(1 - 15e^X + 25e^{2X} - 10e^{3X} + e^{4X}) \\
 P_X^{(5)}(X) &= P_X(X)(1 - 31e^X + 90e^{2X} - 65e^{3X} + 15e^{4X} - e^{5X}) \\
 P_X^{(6)}(X) &= P_X(X)(1 - 63e^X + 301e^{2X} - 350e^{3X} + 140e^{4X} - 21e^{5X} + e^{6X}) \\
 P_X^{(7)}(X) &= P_X(X)(1 - 127e^X + 966e^{2X} - 1701e^{3X} + 1050e^{4X} - 266e^{5X} \\
 &\quad + 28e^{6X} - e^{7X})
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

(c) グラム・シャリエ分布形モデル

このモデルは不規則入力波がガウス分布や対数指数分布のような閉じた式で与えられないような任意分布をしているような場合でも適用可能な確率分布表示であり、次のような直交級数展開型を示す⁶⁾。

$$P_X(X) = n(X) + An^{(3)}(X) + Bn^{(4)}(X) + Cn^{(5)}(X) + \dots \tag{18}$$

ただし、 $n(X)$ および $n^{(i)}(X)$ はそれぞれ標準ガウス分布関数およびその逐次微分である。またその展開係数は、

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{3!} \langle H_3(X) \rangle = \frac{1}{3!} \{3\langle X \rangle - \langle X^3 \rangle\} \\
 B &= \frac{1}{4!} \langle H_4(X) \rangle = \frac{1}{4!} \{3 - 6\langle X^2 \rangle + \langle X^4 \rangle\} \\
 C &= \frac{1}{5!} \langle H_5(X) \rangle = \frac{1}{5!} \{-15\langle X \rangle + 10\langle X^3 \rangle - \langle X^5 \rangle\}
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

よって、不規則入力 $X(t)$ の各次モーメントから推定できる。ここに $H_n(X)$ は n 次の Hermite 多項式である。

本実験で用いたモデルは、平均 0、分散 1 のガウス乱数 800 個と平均 2、分散 2 のガウス乱数 200 個を無作為に混ぜ合わせて非対称かつ山が 2 つあるようなものを作成し、(18) 式で A 、 B のみで打ち切って利用した。 A 、 B の値はそれぞれ、 -0.2459 、 0.0968 で、いわゆる歪度、尖度に対応している。したがって、その逐次導関数は、

$$\begin{aligned}
 P_X^{(i)}(X) &= n^{(i)}(X) + An^{(i+3)}(X) + Bn^{(i+4)}(X) \dots \tag{20} \\
 (i &= 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}$$

で与えられる。

実験結果の相互比較のため、上記 3 種のモデルはすべて平均 0、分散 1 に基準化して用いられる。

§ 3.2 フィードバック経路中の非線形要素

非線形特性として、各種の実際的非線形特性を中間的ケースにもつ極端に対照的な、振幅が増大するにつれ、線形機能以上に振幅の拡大または圧縮性を示す次の 2 つの場合を中心に考察した。

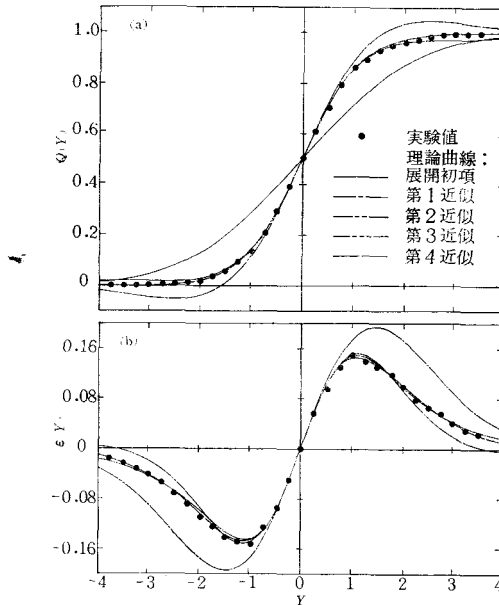


Fig. 7 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = \tanh 2.0Z$, X : ガウス分布. (a) $Q(Y)$, (b) $\epsilon(Y)$.

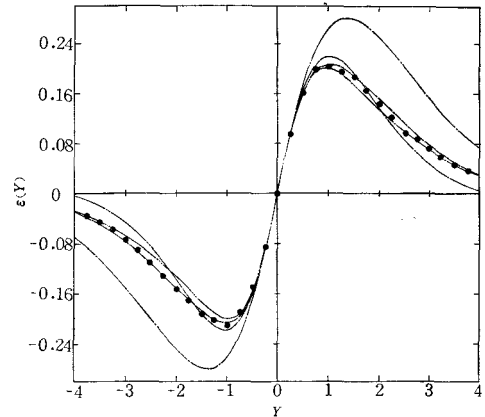


Fig. 8 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = \tanh 2.0Z$, X : ガウス分布.

(i) soft spring force モデル

$$f(Z, \alpha) = \alpha_1 Z + \alpha_2 Z^3 \quad \dots\dots\dots (21)$$

これは、いわゆる軟いバネ特性といわれるものであり、また、一般の奇関数型非線形要素を Taylor 展開して第 2 項まで採用したものとみなせる。

(ii) hard spring force モデル

$$f(Z, \alpha) = \tanh(\alpha Z) \quad \dots\dots\dots (22)$$

これは、いわゆる硬いバネ特性といわれているものである。また、飽和型の非線形要素やリレー要素を連続関数で近似するときしばしば利用される。

上の 2 つのモデルの他に非線形要素ではないが、それらの中間的存在である、

$$f(Z, \alpha) = \alpha Z \quad \dots\dots\dots (23)$$

のようなモデルについても一部実験した。これは、パラメータ α が不規則に変動するときは時変増幅器、あるいは α を別の入力とみたときには掛算器と考えることができる。

§ 3.3 パラメータ K , α の変動モデル

不規則に動揺するシステム・パラメータ K , α の変動形態の設定については、システム構造および不規則入力の特別な選択に対応して、特別な配慮が要求されよう。すなわち、 K , α は、変動における時間経過と振幅分布の姿に特に留意して次のようなモデルの中から選んだ。

(i) 矩形分布型パラメータ変動モデル

(ii) 正弦波型パラメータ変動モデル

正弦波型モデルは不規則変動モデルではないが、周期性を示す代表的なものである。また、その分

布特性は、矩形分布型が $[R_1, R_2]$ 間で一様配布の姿を示すのに対して、むしろ中央より領域のはしの方に集中する極端なものとなっている。正弦波型モデルの周期 T は $\sqrt{2}$ とし、また矩形分布型モデルでは、実際の反映を考えて5時点の間、同じ値を維持しながら比較的ゆるやかに変動するような局所的定常モデルを採用した⁷⁾。

以上のようなさまざまな不規則入力モデル、フィードバック径路中の非線形要素のモデル、システム・パラメータの変動モデルの各組み合わせについて、Tab. 1 に分類した具体的数値例に対して理論と実験との比較を行ったのである。

ディジタル・シミュレーションのためのフローチャートは、実験値算出のためのものの1部を付録の Fig. A-1 に示したのみで、他は一切省略している。

Tab. 1 各モデルの組合わせとパラメータ

$f(Z, \alpha)$	$P_X(X)$	パ ラ メ ー タ			参 照 図
		K	α_1	α_2	
$\alpha_1 Z + \alpha_2 Z^3$	ガ ウ ス 型	0.5	0.25	0.125 0.25	Fig. 4 (a)(b)
	対 数 指 数 型	0.5	0.25	0.125 0.25	Fig. 5 (a)(b)
	グラムシャリエ型	0.5	0.25	0.125 0.25	Fig. 6 (a)(b)
$\tanh \alpha Z$	ガ ウ ス 型	K	α		
		0.5	0.5~1.0 2.0		Fig. 7 (a)(b)
	対 数 指 数 型	1.0	0.5~1.0 2.0		Fig. 8
		0.5	0.5~2.0		
	対 数 指 数 型	1.0	0.5 1.0 2.0		Fig. 9 (a) (b) (c)
		0.5	0.5~2.0		
	グラムシャリエ型	1.0	0.5 1.0 2.0		Fig. 10(a) (b) Fig. 11(a)(b)
		0.5	0.5~2.0		
αZ	ガ ウ ス 型	0.5~2.0	0.25		

(パラメータ変動型非定常モデル)

$\alpha_1 Z + \alpha_2 Z^3$ ガ ウ ス 型

K : 矩形分布
0.5+ ξ , ξ : [-0.25, 0.25]

α_1 : 正弦波型
0.25+0.125 sin ($2\pi t/\sqrt{2}$)

α_2 : 矩形分布
0.25+ η , η : [-0.0625, 0.0625]

Fig.12

§ 4 実験結果

シミュレーション実験は、Tab. 1 にまとめたように、不規則入力モデル、フィードバック径路中の非線形要素のモデル、システム・パラメータの変動モデルをさまざまに組み合わせた場合について行った。その結果のいくつかを Figs. 4~12 に示す。

一般に、理論曲線の算出においては、不規則入力(12)(14)(18)式に示すような確率密度関数をも

つと考えられているが、通常、乱数はいくらかの誤差を伴う。付録の Fig. A-2 (a)(b)(c)は、デジタル計算機で模擬発生させた乱数の誤差検定のため、3種の乱数の実験的累積頻度分布と、それぞれ、(12)(14)(18)式の理論的累積分布曲線との差を示したものである。ガウス型乱数と対数指数型乱数は満足できる精度で発生されているが、グラムシャリエ型乱数は方は、原点付近でかなりの不一致を示している。したがって、乱数の悪さに原因する理論と実験との不一致が生ずることがあり、このため、理論と実験との比較においては、単に実験値が理論曲線の丁度真上にきているかどうかだけで良否を決めるべきではなく、全体的傾向として、理論曲線がいかに実験値をとらえているかで判断すべきであろう。

Figs. 4 (a)(b), Figs. 5 (a)(b), Figs. 6 (a)(b) は、いずれも、フィードバック径路中の非線形要素が soft spring force モデル、すなわち、 $f(Z, \alpha) = 0.5Z + 0.25Z^3$ 、前向きゲインが $K = 0.5$ なる定係数システムの場合、不規則入力を、それぞれ、ガウス型、対数指数型、グラムシャリエ型に変えた場合の実験結果を示している。不規則入力の振幅分布の形によって、出力のそれとかなり形を異にするが、いずれの場合も近似の程度を上げると、全体的傾向として実験値をよくとらえるようになる。Figs. 4~6 のうち、(a) が(10)式の累積分布 $Q(Y)$ 表示、(b) が(11)式非線形フィードバック効果 $\varepsilon(Y)$ 表示にそれぞれ対応しており、図中では、(10)式の展開初項を除いて、展開項を m 個含む表示

を理論曲線の第 m 近似 ($m = 1, 2, 3, \dots$) と表記している。また図中の理論曲線の近似による表記のし方は各図共通であるので、その種別は Fig. 4 (a) など一部のみに示しておいた。

Figs. 7 (a)(b) は $K = 0.5$, $f(Z, \alpha) = \tanh 2.0 Z$ (hard spring force モデル)、ガウス型入力に対する $Q(Y)$, $\varepsilon(Y)$ における理論と実験との比較であり、Fig. 8 は、上記の場合を $K = 1.0$ としたときの比較である。非線形要素のパラメータ α が 2.0 とかなり大きく、したがって非線形型度が強いので、 $\varepsilon(Y)$ における振幅は顕著となっている。又、前向きゲイン K の効果も勿

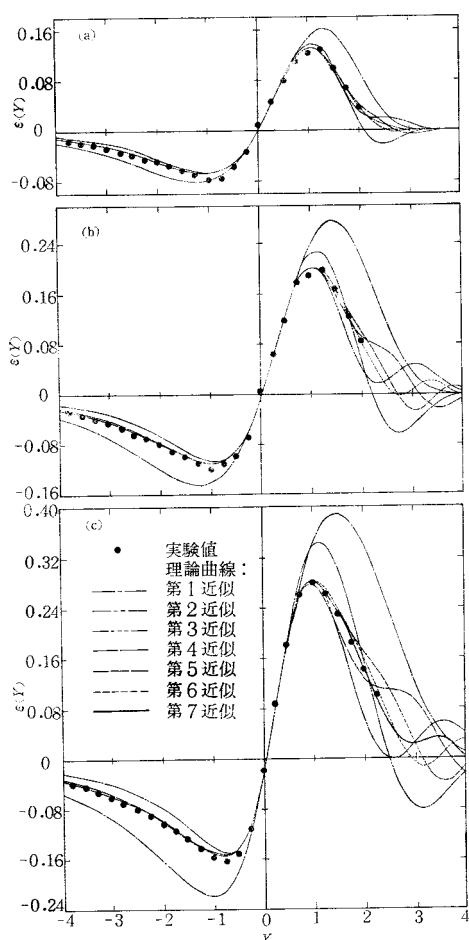


Fig. 9 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = \tanh \alpha Z$, X : 対数指数分布. (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 1.0$, (c) $\alpha = 2.0$.

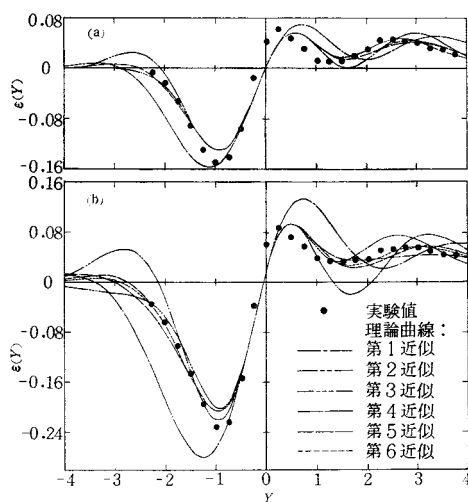


Fig. 10 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = \tanh \alpha Z$, X : グラムシャリエ分布. (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 1.0$.

論, 閉ループを通して $\varepsilon(Y)$ にも現われている。Figs. 4 (a)(b), 7 (a)(b) および Fig. 8 においては, 不規則入力分布および非線形要素の対称性から, 出力分布 $Q(Y)$, $\varepsilon(Y)$ も対称となっているのがわかる。

Figs. 9 (a)(b)(c) は, $K=1.0$, 対数指数型入力の場合で非線形要素 $f(Z, \alpha)$ のパラメータ α を 0.5, 1.0, 2.0 と変えたときの $\varepsilon(Y)$ を示している。更に, Fig. 10 (a)(b), Fig. 11 (a)(b) も不規則入力をグラムシャリエ型として α を変えた場合の結果である。いずれの場合も, α を大きくするにつれ, $\varepsilon(Y)$ の振幅が増大し, 非線形フィードバック効果が増大することを明白にしている。

Fig. 12 はパラメータ変動型の非定常システムモデルの場合の実験結果である。この場合の実験は, Tab. 1 に示すように, $f(Z, \alpha) = \alpha_1 Z + \alpha_2 Z^3$, ガウス型入力の場合, K, α_2 は矩型分布, α_1 は周期的な正弦波変動に選んでいる。それぞれの平均値は, $\langle K \rangle = 0.5$, $\langle \alpha_1 \rangle = \langle \alpha_2 \rangle = 0.25$ である。パラメータの変動と入力過程は統計的に独立に選んだので理論計算には, (7) (8) 式が用いられている。Fig. 4 と Fig. 12 を比較すると, わずかではあるが, パラメータ変動効果は理論表示の収束性を悪化させるようである。

以上の実験結果をもとに, つぎに示す特徴が見出されよう。

1) いずれの場合においても, 理論表示の展開項を逐次付加するに従い, 実験値によく漸近してゆく傾向のはっきり認められる。すなわち, 題意のシステムへの不規則入力の分布特性, 前向き線形要素のゲイン, フィードバック経路中の非線形要素の特性, パラメータの変動形態などがかなり広範囲に変わっても本手法の普遍的な適用可能性が推察される。

2) Figs. 7~9 のように展開初項からのずれが大きい場合は勿論のこと, Figs. 4~6, 12 の場合のように, 一見理論曲線の展開初項のみで十分実験値を説明しているように見える場合ですら, 両者の差を抽出・拡大した $\varepsilon(Y)$ で調べてみると, 理論表示の展開項を増すにしたがってますます実験値に近づいていることがわかる。本実験的考察では工学的意味から, 確率密度表示よりも累積分布表示のほうに着目して実験を行ったが, $\varepsilon(Y)$ における明白な一致は, 確率密度関数での一致性を十分保証すると考えられる。

3) soft spring force モデルに対する Tab. 1 に示すパラメータの具体的数値例はあまり大きくないようにみえるが, 不規則入力分布が平均 0, 分散 1 に規格化されている点に留意しなくてはならない。すなわち, このような変動範囲の大きい入力に対しては, 十分非線形機能の影響下にあるといえ, 本研究は特に弱い非線形にのみ適用可能な理論ではないことを強調しておこう。結果の理論表示が開いた級数展開型となっているため, 特に振動の端が拡大される soft spring force モデルのような非線形要素をもつ場合は, データの信頼性の欠如が起りやすい。そのため, 実験的立場からは, 事前にデータ数を十分多くとるなどの注意が肝要となる。

4) hard spring force モデルに対するパラメータの選択は, データが端で圧縮されるようになるため, soft spring force モデルに比して実験データの信頼性を弱めることがなく, はるかに自由である。この場合, より強い非線形性に対してはより多く展開項数をとればよい。

5) 以上列記したことから, 本理論は, 入力の分布形状および非線形要素 $f(Z, \alpha)$ は, それらが微分可能でありさえすれば, 相当広範なクラスの問題に普遍的に対処しうるものとして特徴付けられよう。ただし, 非線形要素 $f(Z, \alpha)$ は本理論では 1 価に限定されており, このままではヒステリシスなど多価非線形には直接対処できぬことを付記しておく。

以上, 本報告書では多くの実験結果の中から一部のみを取り出して示したが, 他の結果においても勿論理論と実験の妥当な一致性を確認している。

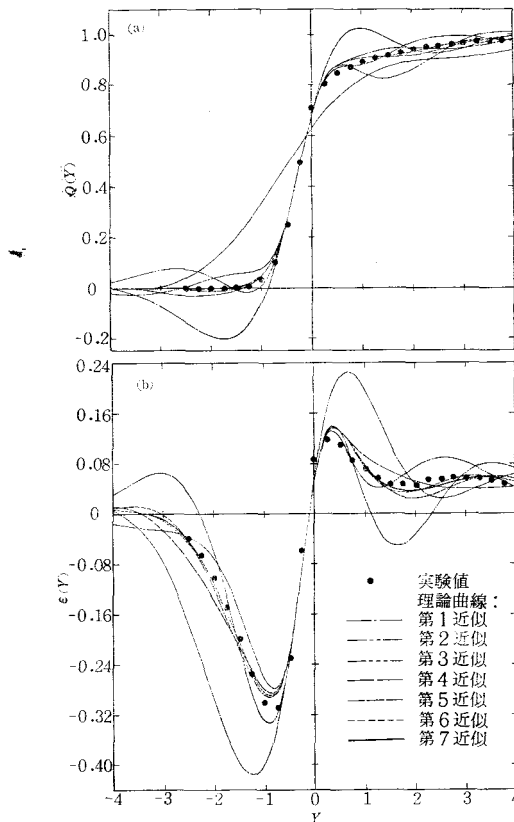


Fig. 11 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = \tanh 2.0Z$, X : グラムシャリエ分布. (a) $Q(Y)$, (b) $\epsilon(Y)$.

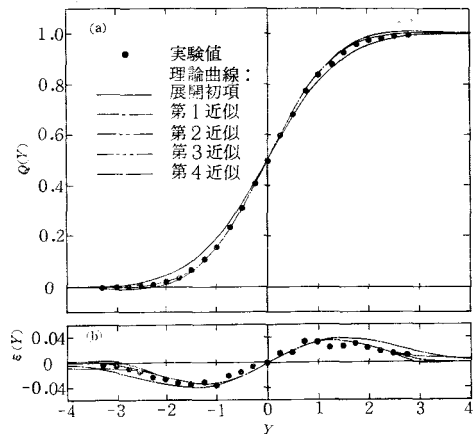


Fig. 12 理論と実験の比較. $f(Z, \alpha) = \alpha_1 Z + \alpha_2 Z^3$, K : 矩形分布, α_1 : 正弦波型変動, α_2 : 矩形分布, X : ガウス分布 (パラメータ変動型非定常モデル). (a) $Q(Y)$, (b) $\epsilon(Y)$.

§ 5 一層進んだ研究

§ 1でも指摘したように、振幅効果としての非線形問題に特に注目して研究したいときには、時間効果としての線形メモリ機能を除去してこそはじめて明白となるという立場から本研究では、まず、題意のゼロ・メモリ型非線形非定常システムに着目した。このような立場は、現代制御論における最大原理⁸⁾や、カルマン・フィルタ⁹⁾においても見受けられることであり、線形ダイナミカル・システムは時間推移効果として最後に付加的に考慮されている。

しかしながら、現実のダイナミカル・システムは線形であれ、非線形であれ、Fig. 3のようなメモリを含まないものとして現われることはなく、メモリを含んだ題意のシステム応答としては(3)式のかわりに次式が考察されねばなるまい。

$$Z_j = \sum_{i=1}^k a_i \{X_{j-i+1} - f(Z_{j-i+1}; \alpha)\} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここに $a_i (i=1, 2, 3, \dots, m)$ は前向き線形要素の離散的インパルス応答関数であり、 $k = \min(m, j)$, $(j=1, 2, 3, \dots)$ である。したがって、一層進んだ研究として次のような問題が考えられよう。

(a) 出力応答の多変量結合分布関数 $P(Z_1, Z_2, \dots, Z_j)$ はシステム構造やフィードバック効果に対応してどのような形で導出されるか？

(b) 過去出力を条件とした1変量力分布関数 $P(Z_j | Z_1, Z_2, \dots, Z_{j-1})$ はどうなるか？

(c)過去および現在入力, 過去出力は逐次的に既知情報とみなせるという観点から, 本理論の1変量分布表示をメモリある系に適用したとき, いかなる理論が展開されうるか?

(a)の問題は既に実験的検証も含めた形で文献 10)に発表しており, また(b)の問題も現在投稿中である(文献11)参照)。(c)の問題は本研究の直接の延長上にあり, 今後の研究課題として残されている。

更に, 本手法の実際問題への応用は, 構造物の不規則応答問題として現在検討中であり, 既に一部結果を得ているが, これは別の機会に報告する予定である。

§6 結 言

本報告は必ずしもガウス分布型に限定しない非ガウス型の一般不規則入力が, 任意特性の非線形要素をフィードバック径路にもち, しかも前向き・後向きの各システム・パラメータが非白色・非定常過程に従って揺らいでもよい一般的なゼロ・メモリ型非線形フィードバック・システムに印加された場合, その出力確率分布に対する新たな統計処理方法を, 既発表の理論表示の確認のため実験的観点から検討したものである。すなわち, 閉ループとしてのフィードバック径路中に含まれる要素の非線形特性, システムに印加される不規則入力の分布形状, システム・パラメータの変動特性などさまざまな任意性が許されることやその統計処理の複雑さから, 実験的考察としては, デジタル・シミュレーションが不可欠との対立から, これを用いて理論表示の正当性を確認した。実験に供したいずれの場合においても, 理論と実験の妥当な一致性が認められ本手法の正当性と有効性が明らかとなった。

謝 辞

本研究に多大の援助をいただいた, 広島電機大学西村正文氏, 電々公社沢田哲雄氏, 広島大学山口静馬氏および沖田豪氏に深甚なる謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) E. Mishkin and L. Braun : Adaptive Control System (Maple Press, New York, 1961).
- 2) J.J. Stoker : Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems (Interscience, New York, 1950).
- 3) J.T. Tou : Modern Control Theory (McGraw-Hill, New York, 1965).
- 4) N. Wiener : Nonlinear Problems in Random Theory (Technical Press and John Wiley and Sons, New York, 1958).
- 5) 広光・太田 : 呉工業高等専門学校研究報告, 12, 1 (1976) 57.
- 6) M. Ohta : *Memoirs of the College of Science, University of Kyoto, Series A*, XXX (1952) 11.
- 7) 太田 : システムと制御, 16 (1972) 423.
- 8) L.S. Pontryagin, et. al. : The Mathematical Theory of Optimal Processes (Interscience, New York, 1962).
- 9) R.E. Kalman : *Trans. ASME, J. Basic Engrg.*, 82 (1960) 35.
- 10) 太田・広光・西村・沖田 : 計測自動制御学会論文誌, 12, 4 (1976) 367.
- 11) 太田・広光・西村・吉野 : 広島大学工学部欧文紀要 (投稿中).

付 録

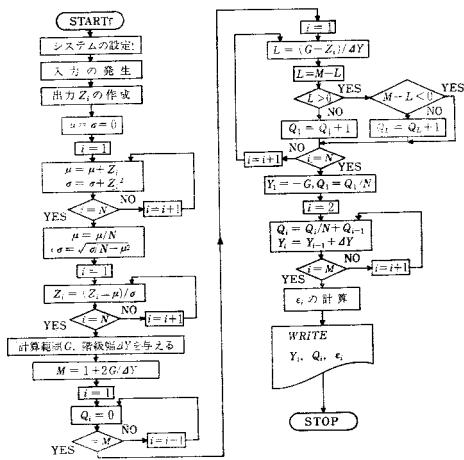


Fig. A-1 デジタル・シミュレーションによる実験値算出のためのフローチャート（1部のみ）.

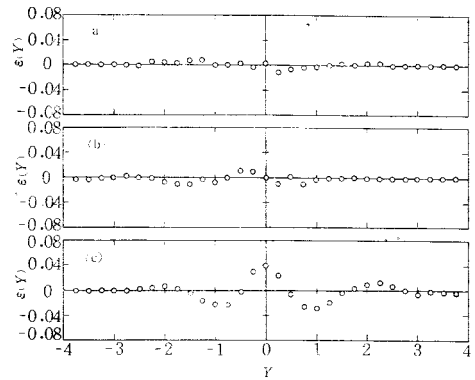


Fig. B-2 乱数の検定. (a) ガウス乱数, (b) 対数指数乱数, (c) グラムシャリエ乱数.

(昭和51年11月17日受付)

FORTRAN 演習用システム COLT/KTC

(電気工学科)	村	上	滋	樹
(電気工学科)	吉	野	信	行
(電子計算機室)	町	田	勝	吉

FORTRAN Training System COLT/KTC

Shigeki MURAKAMI

Nobuyuki YOSHINO

Masayoshi MACHIDA

The basic problem, when the COLT supplied by FUJITSU was introduced into our one-DP system was that COLT was executable only in two-DP's system.

To work out this problem and another some problems, modifications and additions on COLT were performed.

The COLT/KTC (COLT for Kure Technical College) has brought about more detailed analysis on training process, more troubleless operation and unified implementation of logging data.

1 緒 言

昭和49年度に導入された FACOM 230—28S¹⁾ システムは教育，研究に活用されているが，FORTRAN 演習を効率的に行うための COLT ユーティリティ²⁾をもっていることが機種決定のきめの一つであった。

学級単位で行う計算機用言語教育システムにおいて一般的に要求される条件としては次のようなものが考えられる。

- (1) 1 学級分のジョブが1ジョブとして処理できること。
- (2) 一斉演習を実現するためマークカードが使用できること。
- (3) エラーメッセージがていねいであること。
- (4) 成績の分析，把握が容易であること。

富士通³⁾提供の COLT (COMputer Language Training system)は上の条件をほぼ満すシステムであるが，そのままではいくつかの問題点があったので修正，追加を行って一応満足すべきシステム COLT/KTC (呉高専 COLT システム) が得られたのでその概要を報告する。

2 提供システムの問題点

提供システムには次のような問題点があった。

- (1) 退避用MTまたはDPを備えた標準機器構成システム用のユーティリティのため成績情報の編集機能が活用できない。
- (2) 成績情報が詳細なため、成績ファイルが大容量となり5MBのバックでは累積率が大きくとれない。
- (3) 補助制御カード(とくに／SOC文)のマークミスにより操作時に手間がかかる。
- (4) COLT 処理に関する会計情報と他の処理に関する会計情報³⁾との併合ができない。

当初は COLTEDIT によって得られる情報を COBOL を用いて作成した編集プログラムにより成績情報表 (COMPILE AND GO INFORMATION LIST) を印刷させ COLT の主機能 (一括処理) だけを利用していた。全機能を活かしさらに問題点を解決するため、提供システムのソースリストを入手し検討を加えて修正、追加した結果1バックシステムで運用可能なシステムが構成できた。

即ち、退避用ファイルの確保、成績情報の圧縮、クラス名のカナ文字表示、補助制御カード検査によるトラブルの軽減及び COLT 会計情報の会計情報ファイル (＃4バック) への累積が可能となった。

3 COLT/KTC

3.1 概要

COLT 処理に先立って補助制御文等を MDCHECK により検査しエラーを見つける。次にソースプログラム、データを補助制御文とともに入力し、メンバー別にファイルを作成し、カタログファ

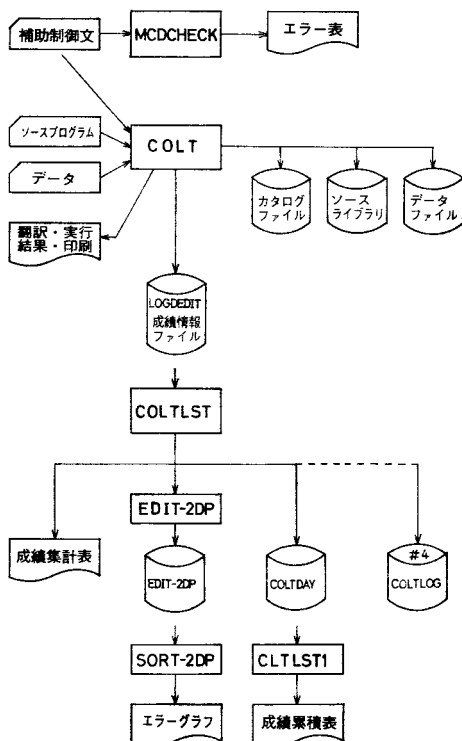


図1 COLT/KTC 処理工程

```

*M *EXEC MDCHECK,LIB/DP-A1
*** マークニセフトシタ0オタイプセヨ ***
*ACCEPT*

```

MDCHECK

```

*M *EXEC COLTST,LIB/DP-A1
*** COLTST START ***
*** EDIT-2DP START ***
*** READ COUNT ---000330
*** WRITE COUNT ---000190
*** CHANGE TO DP#4 ***
.M CONT
*** CHANGE TO DP#3 ***
.M CONT
*** COLTEDIT END ***

```

COLT(MAIN)

```

*M *EXEC CLTLST1,LIB/DP-A1
*** CLTLST1 START ***
*** ユニツク? YES OR NO
*ACCEPT*
NO
*カンオタイプセヨ YMHDD-YMHDD
*ACCEPT*
761001-761031
.M SM004 PHASE 2
.M SM006 DISK SORT
.M SM007 WAY 05
.M SM008 INPUT RECORD 0000032
.M SM010 PHASE 3 SKIPPED
.M SM011 PHASE 4
.M SM012 OUTPUT RECORD 0000032
.M SM019 SORT/MERGE END

```

COLTLST EDIT-2DP

```

*M *EXEC CLTLST1,LIB/DP-A1
*** CLTLST1 START ***
*** ユニツク? YES OR NO
*ACCEPT*
NO
*カンオタイプセヨ YMHDD-YMHDD
*ACCEPT*
761001-761031
.M SM004 PHASE 2
.M SM006 DISK SORT
.M SM007 WAY 05
.M SM008 INPUT RECORD 0000020
.M SM010 PHASE 3 SKIPPED
.M SM011 PHASE 4
.M SM012 OUTPUT RECORD 0000020
.M SM019 SORT/MERGE END
*** PRINT-SUB-START ***
*** PRINT-READ ---000010
*** PRINT-SUB- END ***

```

CLTLST1

```

*M *EXEC SORT-2DP,LIB/DP-A1
*** SORT-2DP START ***
*ACCEPT*
E4
*カンオタイプセヨ YMHDD-YMHDD
*ACCEPT*
761001-761031
.M SM004 PHASE 2
.M SM006 DISK SORT
.M SM007 WAY 05
.M SM008 INPUT RECORD 0000020
.M SM010 PHASE 3 SKIPPED
.M SM011 PHASE 4
.M SM012 OUTPUT RECORD 0000020
.M SM019 SORT/MERGE END
*** PRINT-SUB-START ***
*** PRINT-READ ---000010
*** PRINT-SUB- END ***

```

SORT-2DP

図2 コンソールメッセージ

イルの制御文群により順次処理を進めて翻訳実行し結果を印刷すると同時に成績情報ファイル [LOGDEDIT] (以後ファイルは [] で囲んで表わす。) に成績情報を格納する。データファイルは9組までのデータエリア [DTnKOSEN] を確保している。UPDATE, 表紙印刷は殆んど必要を認めないのでふつうはその機能を利用していない。

[LOGDEDIT] の中から COLTLST により必要情報を抽出し [COLTDAY] に個人別に累積するとともに成績集計表を印刷する。

エラーグラフ作成に必要な情報は [EDIT-2DP] に累積する。また COLT/KTC は #3 パックに入っているが会計情報は #4 パックの [COLTLOG] に累積する。

当電子計算機室で修正したプログラムは COLTLST, EDIT-2DP, SORT-2DP で1パックシステムで動作させるためのファイル確保に関する修正と, MTまたはDPの指定をタイプイするようにになっていたがDP一本とし除いた。当室開発分は CLTLST1 と FASP によるファイルクリア用の RNWLOGDP, RNWSR1DP 及び RNWSR2DP である。

処理の流れはコンソールメッセージ (一部省略) を参照することにより理解されよう。

3・2 補助制御文検査プログラム

/PARA, /SOC, /SEND, /DATA, データ及び END CHAIN 文を検査するが, 主使用目的は学生が作成する /SOC文を検査することである。ソースプログラムに関するマークミスはエラーメッセージで分るが, /SOC 文に誤りがあると全カードを再入力するなどの面倒なことが生じるので新しい課題の演習に入る時点で検査することが望ましい。検査例のように, メンバー名の初めの4けた (学科, 学年, 出席番号), 3けたの識別番号については標準形か番号の重複はないかを調べ, データ番号についてはデータ組数を超えていないかどうか調べ誤りがあれば表示する。

```

/ PARA F=STRAN,LIST,NOTPAGE          7-21X
/ SOC E4011AEN,405,1
/ SOC E4021AEN,405,1
/ SOC E4031TO,405,1
/ SOC E4031TO,405,1
/ SOC E404ENOH,404,1
/ SOC E405EGUS,405,1
/ SOC E406OITA,406,1
/ SOC E406MOH,404,3
/ SOC E407OKAD,407,1
/ SOC E408ONO,408,1
/ SOC E408HO,408,1
/ SOC E408ACE,409,1
/ SOC E410KAJI,410,1
/ SOC E412RMOH,411,1
/ SOC E412KONA,412,1
/ SOC E413CMA,413,1
/ SOC E413SACA,413,1
/ SOC E414SADA,414,1
/ SOC E415SADA,415,1
/ SOC E416SADA,415,5
/ SOC E416SUDU,414,2
/ SEND
/ DATA 1,0003
      4
      7, -14, -30, 156,
      138, 89, 34,
/ DATA 2,0001
      1
/ END CHAIN

```

図3 補助制御文検査例

M A432YAMA	JO095036		KOSEN	A432YAMA76102900279
M A432YAMA	CM	** FORTRAN SOC=0032 CLASS=KOSEN	KOSEN	A432YAMA76102900280
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7014Y 0002	KOSEN	A432YAMA76102900281
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7014Y 0008	KOSEN	A432YAMA76102900282
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7048Y 0009	KOSEN	A432YAMA76102900283
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7068Y 0011	KOSEN	A432YAMA76102900284
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7060Y 0016	KOSEN	A432YAMA76102900285
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7014Y 0017	KOSEN	A432YAMA76102900286
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7068Y 0023	KOSEN	A432YAMA76102900287
M A432YAMA	USPPPPPPFTCE	F7200Y 0026	KOSEN	A432YAMA76102900288
M A432YAMA	SC095052FUHTRAN	000000000400002189000000017	KOSEN	A432YAMA76102900289
M A432YAMA	SC095054EXEC	000000000000000003600000002	KOSEN	A432YAMA76102900290
M A432YAMA	JC095057		KOSEN	A432YAMA76102900291

(a) LOGDEDIT (124B)

A432YAMA095036021002225 0400N08KOSEN A432YAMA76102900291

(b) COLTDAY (62B)

図4 [(LOGDEDIT)] と [(COLTDAY)]

3.3 成績情報編集プログラム

図4(a)のような〔LOGDEDIT〕の内容を(b)の〔COLTDAY〕の場合には62Bに圧縮する。〔EDIT-2DP〕は学級単位のエラコード別エラー数等を累積する。〔COLTLOG〕は会計情報³⁾と同一内容である。

3.4 成績累積表作成プログラム

〔COLTDAY〕の情報を個人別または学級別及び期間の指定に従って演習状況を印刷する。副プログラム RNWSR1DP をもち SORT も使用する。学級別の場合の例は図5の通りで、個人別の場合にはコストらんが除いてある。

カ イ リ ャ ン キ シ ョ ウ シ ョ ウ キ ョ ウ ヒ ョ ウ										PAGE	1
キ カ ン 76.09.01 --- 76.09.30										DATE	76.10.19
CLASS-NAME	JOB-TIME	COST	CPU-TIME (S)	SH,CNT	COMPILE	EXEC	NORMAL	ABORT	ERROR	N O T E	
ケンタ 5 ナン	0: 2: 8	¥60	13,339	20	8	8	8	0	5		
ナンキ 4 ナン	0: 4:20	¥99	25,084	33	15	11	11	4	11		
コウタイ	0: 6:28	¥159	38,423	53	23	19	19	4	16		
ハイケン	0: 3:14	¥79	19,211	26,5	11,5	9,5	9,5	2,0	8,0		

図5 成績累積表

3.5 エラーグラフ作成プログラム

学級及び期間の指定に従って SORT した後エラーグラフを描かせる。コード別エラー数、各エラーの割合を棒グラフと数値〔%〕で示す。なおこの例には出ていないがエラーメッセージの場合は無表示であったものを「ブンバンゴウ」等の表示を行うよう修正した。

CLASS / GROUP ERROR LIST FOR COMPUTER SYSTEM										PAGE	1
*****										DATE	76,10,19
CLASS-NAME	ナンキ 4 ナン										
NUMBER		10	20	30	40	50	60	70	80	90	100(%)
COMPILE-ERROR-CODE		----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- ----- -----									
FT014Y (1)		***** (9)									
FT048Y (1)		***** (9)									
FT053Y (1)		***** (9)									
FT067Y (2)		***** (18)									
FT068Y (2)		***** (18)									
EXEC-ERROR-CODE											
3001 (2)		***** (18)									
3706 (2)		***** (18)									
// COMPILE //	7										
// EXEC //	4										
// TOTAL //	11										

図6 エラーグラフ

3.6 会計情報の併合

一般処理分と併合された10月分集計表の例を図7に示したが、学級名と COLT の表示を出して教

ランタウカワカ トン

7 イ リン キ シ ヨ ウ シ ヨ ウ 93 ウ ツ ウ チ ショ

76.10.01 --- 76.10.31

DATE 76.11.01

ランシゲイランキシフチヨウ

JOB-NAME	N A M E	JOB-COUNTS	PROCESS-TIME	CPU-TIME (S)	SHEET-COUNTS	C O S T	N O T E
A0010FKH	フコハシ ヲスヒロ	2	0:09:55	254,998	9	¥27	キヨウカン
A0011FKH	フコハシ ヲスヒロ	2	0:03:24	054,639	18	¥54	ソツケン
A0012FKH	フコハシ ヲスヒロ	9	0:32:43	758,008	84	¥252	ソツケン
コシエンコウガイ	フコハシ ヲスヒロ	13	0:46:03	1067,645	111	¥333	
A0030MNZ	モンセン カツアキ	13	0:18:09	467,551	85	¥255	キヨウカン
A0031MNZ	モンセン カツアキ	3	2:16:03	7950,401	28	¥84	ソツケン
コシエンコウガイ	モンセン カツアキ	16	2:34:13	8417,952	113	¥339	
A0040FJI	フシアイ タツル	2	0:01:21	007,607	3	¥9	キヨウカン
A4	ランタウカワカ	28	0:10:09	069,073	122	¥366	COLT ←
ランタウカワカ	コウ ケ イ	59	3:31:47	9562,277	349	¥1,047	

図7 使用状況通知書

官研究，卒業研究との識別を行っている。

4 結 言

1 パックシステムの COLT が完動できるようになり会計情報の一本化も実現した。FORTRAN 演習に活用され教育効果が向上することを期待する。今後エラーメッセージの質向上，個人別エラー修正状況の把握，COBOL 演習システムの開発について検討をすすめたいと考えている。

終りに色々と御援助頂いた扶桑電子㈱ S E の児玉氏，久兼氏，新星工業㈱ C E の安藤氏に謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) 村上：呉高専 FACOM 230—28 S システム；呉高専研究報告第11巻第2号，昭和51年3月。
- 2) 富士通：FACOM 230 BOS 教育用システム説明書；昭和48年10月。
- 3) 吉野・町田：呉高専電子計算機室会計編集プログラム“EDP・LOG”；呉高専研究報告第11巻第2号。

(昭和51年11月5日受付)

輝度分布によるモデリング効果の研究

(電気工学科) 原 田 一 彦

A Study in Modelling Effect with the Distribution of Luminance

Kazuhiko HARADA

It is important to consider preferable modelling effect in lighting design and lighting condition as most of objects are solid. There are already some studies which take maximum luminance /minimum luminance, average vertical illuminance/ horizontal illuminance and illuminance vector, vector : scalar ratio as modelling indexes.

In this paper, we have studied lighting condition required for preferable modelling effect by the ratio of area which classified luminance of the object with five grade as a modelling index.

The following result was obtained :

As for the manikin's face under incandescent lamps lighting, the ratio when the modelling effect was most was about 1 : 3 : 4 : 4 : 2.

§ 1 緒 言

人工光源による照明は量から質へと移行しつつある。すなわち、従来は明るさ一返倒で視作業の能率や疲れなどが取り上げられてきたが、最近快適視環境の条件としてモデリングが検討されるようになった。ほとんどの視対象が立体であることから考えれば、照明によってそれらが立体として適切に見えることは当然ながら大切である。したがって、これからはこのモデリングを照明設計や照明条件として考慮に入れなければならない。

モデリングを評価するにあたっては、立体に照明されている光の量の表現法とそのときの主観的評価との関係を論じなければならない。Moon, Spencer 氏らは最大輝度/最小輝度を¹⁾, Hewitt 氏らは平均鉛直面照度/水平面照度を²⁾, Cuttle 氏らは照度ベクトル, ベクトル:スカラ比をモデリングインデックスとした研究を発表しており³⁾, また, 照度ベクトルの高度と方位の関係からの発表や⁴⁾, 空間照度計を使用した研究⁵⁾ などがあるが, 本研究は視対象物の輝度を測定し, それを段階的に分類しその面積分布を調べてモデリング効果の条件を検討したものである。

§ 2 実験方法

図1に示すように長さ2mの垂木で立方体の枠を作り, これに60Wレフランプ(フラッド形)を全部で43個取り付け, 中心部に立体視対象物として写真のマネキン人形を置いた。ランプは15のグループに分けて点灯できるようにした。スポットライトを使用すれば, 容易にモデリング効果を好ましい状態にできると予想されるが, その場合の空間は非常に狭くなり, 視対象がある程度移動すると都合が悪くなる。したがって, 今回の実験ではスポットライトは使用せずフラッド形ランプだけの照明と

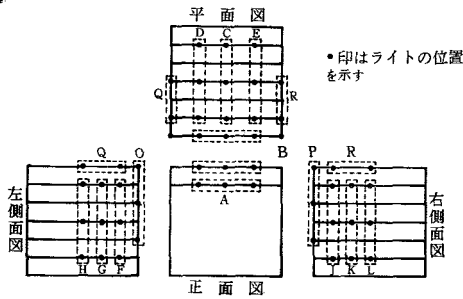


図1 モデリングの実験装置



写真 視対象のマネキン

した。

実験は、グループ別にしたランプをあらゆる組合せによって点灯し、15名(男子、20才)の被験者によって肉眼と写真の両方で10組を選択し、これにランダムに選んだ10組とを研究対象とした。これら20組のマネキンの顔の輝度を測定し、それを $30\text{cd}/\text{m}^2$ 間隔の5段階の輝度レベルに区分して作画したものを検討資料とした。作画には露光時間を調節して現像した印画紙を使用した。

§ 3 実験結果と吟味

多数の組合せから選択した10組はつぎの通りで、アルファベット符号は図1に示すようにランプのグループを表わす。

- | | | |
|-----------|-----------|-----------|
| 1. ABCDJO | 2. ABCEFG | 3. ACDFGO |
| 4. ACEKPQ | 5. ABFGOR | 6. ABCDJP |
| 7. ACDEPQ | 8. ABFJOP | 9. ACDFJP |
| 10. ABCDJ | | |

これらを5名(女子、17才)の被験者を増して再び表1の基準で評価し、モデリング効果が最も好ましいと判定されたのが表2の3組である。この3組と残りの7組および他の10組の3つのグループに分けて比較したところ、好ましくないと判断された10組は輝度段階の面積比にバラツキがあり、最も好ましいとされたグループはある値を示し、残りの7組のグループはその中間の性質を示した。これから、輝度分布の面積比をモデリングインデックスとして評価できることがわかった。表2からわかるように、輝度の最高値の面積を1としたとき、約1:3:4:4:2の比のときがマネキンの場合最も好ましいモデリング条件であるという結論を得た。図2～図4はその場合の段階的輝度分布図である。3組ともA、Bのグループのランプが点灯されているが、ベクトル高度で示すと約 $40^\circ \sim 43^\circ$ 、F、JおよびG、KならびにH、Lのランプ群はベクトル方位では約 45° 、 60° 、 90° となり Cuttle 氏らの結果の条件内にある。また、図からわかるようにマネキンの顔の中心部に輝度の最も高い部分があり、端面が低い部分となっている。顔の場合はこのことがモデリングの効果をよくする条件のようで、Fischer 氏らも人の顔は正面からの照明が最もよいと発表している。

Moon, Spencer 氏らはモデリングインデックスに最大対最小の輝度比を採用し、3:1を最良、2

表1 モデリング効果の評価基準

評 価	内 容
5	非常に好ましい
4	好ましい
3	普 通
2	劣っている
1	非常に劣っている

表2 モデリング効果が最も好ましいと判定されたランプの組合せと輝度段階の面積比

ランプの 組合せ	輝度段階(平均輝度 cd/m^2)	面 積 比
A	1 (140)	1
B	2 (110)	3
C	3 (80)	4
D	4 (50)	4
J	5 (20)	2
Q		
A	1 (140)	1
B	2 (110)	3
C	3 (80)	3
E	4 (50)	4
F	5 (20)	2
G		
A	1 (150)	1
B	2 (120)	3
E	3 (90)	4
J	4 (60)	4
O	5 (30)	2
P		

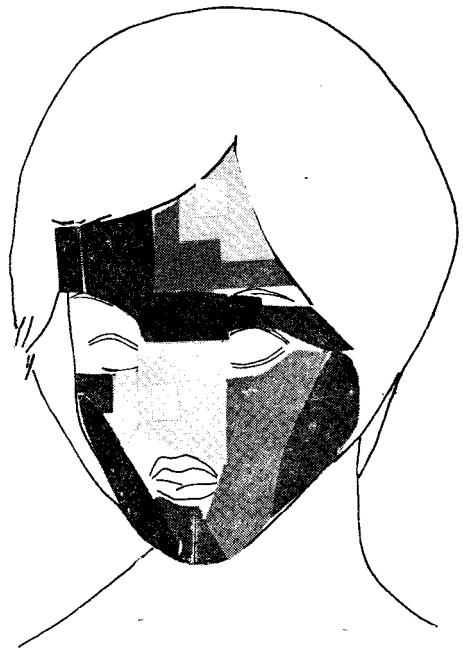


図2 ABCDJQ群のランプを点灯したときのマネキンの顔の段階的輝度分布

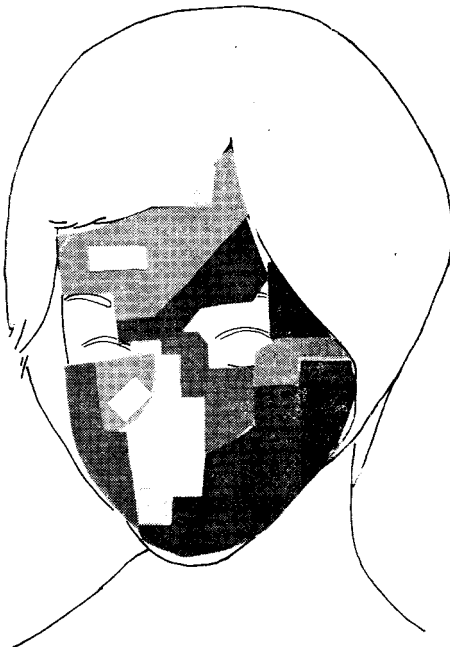


図3 ABCEFG群のランプを点灯したときのマネキンの顔の段階的輝度分布

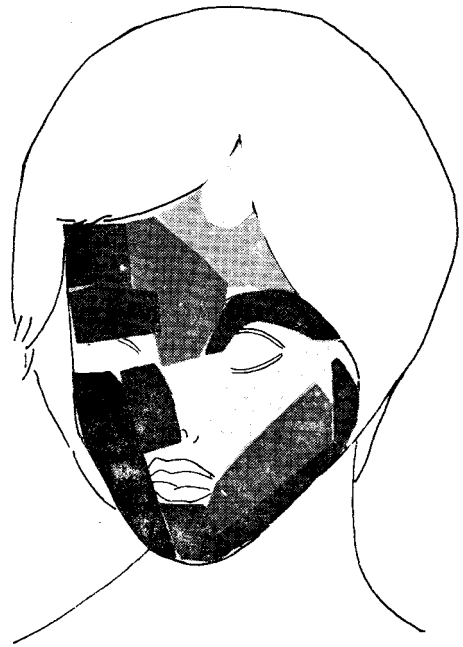


図4 ABEJOP群のランプを点灯したときのマネキンの顔の段階的輝度分布

: 1 ~ 6 : 1 が受け入れられる範囲としているが、図 2 および図 3 は 7 : 1, 図 4 は 5 : 1 であった。

被験者の性別による差異はみられなかった。

フラッドランプだけの照明でも、高度および方位に留意すればある程度のモデリング効果が期待できるが、実際に照明をする場合、ブラケットの高さ、位置等を考慮して有効に利用することが必要である。

§ 4 結 言

モデリングに関する研究は既に行なわれているが、モデリングインデックスおよびその良好な範囲等の決定についてはまだ結論がでていないようである。試みとして、視対象物を 5 つの段階的輝度分布に分類しその面積比で検討することにし、マネキンの顔の場合は約 1 : 3 : 4 : 4 : 2 が最も好ましいという結果となった。しかし、それぞれの位置およびその関係、輝度の段階数については検討すべき問題が残されている。また、視対象物が静物では違った結果になることも予想される。固定的な対象物ではスポットライト照明が有効であるが、対象物が移動する場合はある程度の範囲でモデリング効果が期待できる照明方式を考える必要がある。

最後に、卒業研究として測定していただいた本校電気工学科 8 期生小島通伸君および協力していただいた被験者の皆様に厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Moon, P. and Spencer, D. : Modelling with light, Jour. Franklin Institute 251 (1951) 453
- 2) Hewitt, H. et al : Lighting and the environment, Trans Illum. Engng Soc. 30 (1965) 91
- 3) Cuttle, C. et al : Beyond the working plane, Proc. CIE, p. 67, 12 (1967)
- 4) 阪口他 : 昭和49年度照明学会全国大会講演論文集61, 62
- 5) 伊藤他 : 同 上 60
- 6) Fischer, D. : The European approach to the integration of lighting and air-conditioning, Lighting Res. and Technology 2 (1970) 150

(昭和51年11月1日受付)

地盤の変形解析に関する基礎的研究

—— 2次元弾性解析 ——

土 木 工 学 科 小 堀 慈 久

広島大学工学部 網 干 寿 夫

Fundamental Study on the Deflection Analysis of Underlying Soil

—— 2 Dimensional Elastic Analysis ——

(Dept. Civil. Engrg.) Shigehisa KOBORI

(Hiroshima Univ.) Hisao ABOSHI

Because of the complexity of the mechanical properties of soils and the disturbing influences of stratification, the settlement of buildings can be accurately predicted only under exceptional conditions. In reality, the weight of every structure compresses and deforms the underlying soil. Experience has shown that the vertical pressures can be computed with sufficient accuracy on the assumption that the subsoil of the building is perfectly elastic and homogeneous. In the solution of problems of elasticity it is sometimes advantageous to use the principle of virtual work. In the case of a particle, this principle states that if a particle is in equilibrium, the total work of all forces acting on the particle in any virtual displacement.

§ 1 ま え が き

土の圧縮応力の範囲があまり大きくなければ、弾性近似がかなりの程度で成り立つことは良く知られている。粘土などのように圧圧沈下の問題となる圧縮性の高い土では粘着力のため、ある程度の引張り抵抗をもつ。したがって局部的に載荷された粘土地盤内に生ずる、弾性引張り応力に耐えることが可能であり、粘土地盤に対する弾性解の適用性はかなり大きい訳である。一方、複雑な地盤の全体的挙動を推定する上で有限要素法 (Finite Element Method) の開発は明るい展望を与えてくれた。F.E.M. は変分原理に基礎をおく微分方程式の近似解法の一つであり、したがってその応用範囲は、変分原理の存在する分野をすべて含むことが出来る。特に構造工学では変分原理がエネルギー原理として表現され、大きく分けて二つの根本原理、すなわち仮想仕事の原理と補仮想仕事の原理の形でまとめられているが、これらを数学的に変換し、その中から境界条件を満足する解を探り出す方法がいわゆる解析的方法であるのに対し、原理を直接利用し、近似解を得る方法、たとえば Ritz 法、Galerkin 法などの近似解法が存在し、F.E.M.はこの方法をマトリックスを用いて整理したものと考える事が出来る。

ここでは述べた事柄を踏えて、変分原理の若干の理論的検討と F.E.M. よりモデル化した地盤内の

強度と変形について述べるものである。

§ 2 エネルギー原理における変分法

エネルギー原理を用いた解法は厳密解が得られないような弾性問題の近似解を得るのに重要な役割をなし、この方法はエネルギー式を最小化することの直接の結果として弾性問題の支配方程式が得られる事の事実に基づいたもので弾性基礎方程式である微分方程式を解くかわりに、そのエネルギー式を最小にするように解を求められるのである。この方法を進めるのに変分法と呼ばれる数学的手法により解かれるものである。

2.1 変分法の基礎理論

変数 x 、関数 u 及びその x に関する一次と二次の導関数 u' 、 u'' などの関数 $F(x, u, u', u'')$ のある区間での積分 A を考える。

$$A = \int_{x_1}^{x_2} F(x, u, u', u'') dx \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

A はある関数の関数であるから汎関数と呼ばれ、例えば変形する物体のポテンシャルエネルギーのように、汎関数は通常明らかな物理的意味をもつ。図-1に示す領域 $[x_1, x_2]$ において定められているものとし、その境界において、 u が次の値をとるものとする。

$$u(x_1) = u_1, \quad u(x_2) = u_2 \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

上記のように境界条件を満足する仮想的な解を考える。正解の近傍での仮の解 \bar{u} は正解 u と、その変分 δu の和によって表わされる。すなわち

$$\bar{u} = u + \delta u \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

$u = u(x)$ の変分は独立変数 x の固定した値、すなわち、 $\delta x = 0$ に対する u の微小な任意変化として定義される。いくつかの変数の関数の変分あるいは汎関数の変分は全微分の計算と同様に次のようになる。

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

今、(2.1) 式の汎関数 A を考えると、解の変分に相当するこの汎関数の小さい変化あるいは変分を考えると、単一の関数の最大又は最小に対する通常の計算との類似から A を停留状態にするための条件が次のように与えられる。

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' + \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' \right) dx = 0 \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

あるいは

$$\delta A = \int_{x_1}^{x_2} \delta F dx = 0 \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

(2.5)式における多項に対して部分積分を用いると次の関係が与えられ、

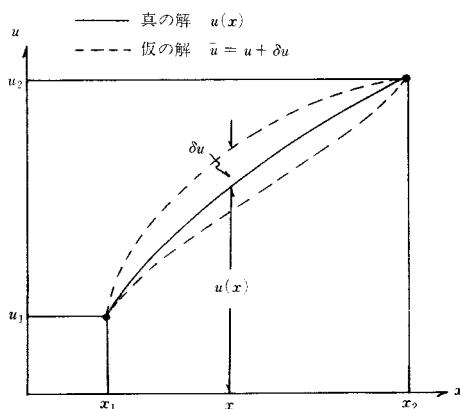


図1 変分法における領域

$$\left. \begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u} \delta u dx, \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial u'} \delta u \right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \delta u dx \\ \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial u''} \delta u'' dx &= \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u dx \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.7)$$

(2.7)式の各々を加え合わせると次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u dx + \left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} \\ &\quad + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \dots\dots\dots(2.8) \end{aligned}$$

(2.8)式で変分 δu は任意であるから右辺の各項より次式が得られる。

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) = 0 \dots\dots\dots(2.9)$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right] \delta u \Big|_{x_1}^{x_2} = 0 \dots\dots\dots(2.10)$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \delta u' \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \dots\dots\dots(2.11)$$

(2.9)式は問題に対する支配微分方程式であり、(2.10)、(2.11)式は境界条件である。次の条件式

$$\left[\frac{\partial F}{\partial u'} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u''} \right) \right]_{x_1}^{x_2} = 0, \left[\frac{\partial F}{\partial u''} \right]_{x_1}^{x_2} = 0 \dots\dots\dots(2.12)$$

これらは、自然境界条件で、これらが満足されるならば、自由境界条件と呼ばれる。自然境界条件の一つが満足されないならば、(2.10)式と(2.11)式のそれに相当する部分が満足されなければならない。すなわち

$$\delta u(x_1)=0, \delta u(x_2)=0, \delta u'(x_1)=0, \delta u'(x_2)=0 \dots\dots\dots(2.13)$$

として、幾何学的境界条件が与えられる。この種の問題に対し、変分法は1つの支配方程式と4つの境界条件を与える。

2.2 仮想仕事の原理

物体力と表面力の作用をうけて釣り合い状態にある。物体の表面では、方向も含めて考えると次のような2種類のいずれか1つの境界条件が規定されることになる。

体積 V 、表面 S をもつ物体では

$$S = S_\sigma = S_u \dots\dots\dots(2.14)$$

S_σ ；表面力 $[T_x, T_y, T_z]$ が与えられている境界

S_u ；変位 $[u_x, u_y, u_z]$ が与えられている境界

このように実在する変位の組を $[u_x, u_y, u_z]$ とし、これに対してこれらの条件のうち適合条件と境界条件は満足するが、平衡方程式を満足しないような仮想的な変位を $[u_x + \delta u_x, u_y + \delta u_y, u_z + \delta u_z]$ と表わすこととする。ただし

$$\delta u_x = 0, \delta u_y = 0, \delta u_z = 0; S_u \text{ 上である} \dots\dots\dots(2.15)$$

このような $[\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z]$ を仮想変位とする。

物体には体積 V を通じて $\{F\}^T = \{F_x, F_y, F_z\}$ なる物体力が, 又境界 S_σ に対して $\left\{\frac{n}{T}\right\}^T = \left\{\frac{n}{T_x}, \frac{n}{T_y}, \frac{n}{T_z}\right\}$ なる表面力とが作用するので, 外力が仮想変位 $\{\delta u\}^T$ に対してなす仕事 W_e は

$$W_e = \int_V \{F\}^T \{\delta u\} dv + \int_{S_\sigma} \left\{\frac{n}{T}\right\}^T \{\delta u\} ds \quad \dots\dots\dots (2.16)$$

$\left\{\frac{n}{T}\right\}$; 微小四面体における

$$\begin{Bmatrix} \frac{n}{T_x} \\ \frac{n}{T_y} \\ \frac{n}{T_z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$$

$$\text{すなわち } \left\{\frac{n}{T}\right\} = [\sigma] \{n\} \quad \dots\dots\dots (2.17)$$

となるコーシーの関係で表面力を表わす。

ここで $\left\{\frac{n}{T}\right\}$ は(2.17)式を満足するから, 上式は次のように書き換えられる。

$$W_e = \int_V \{F\}^T \{\delta u\} dv + \int_{S_\sigma} \{n\}^T [\sigma] \{\delta u\} ds \quad \dots\dots\dots (2.18)$$

表面 S のうち幾何学的境界 S_u では (2.15) 式より $\{\delta u\} = 0$ であるから(2.14)式の関係の考えると(2.18)式は

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \{F\}^T \{\delta u\} dv + \int_{S_\sigma} \{n\}^T [\sigma] \{\delta u\} ds + \int_{S_u} \{n\}^T [\sigma] \{\delta u\} ds \\ &= \int_V \{F\}^T \{\delta u\} dv + \int_S \{n\}^T [\sigma] \{\delta u\} ds \quad \dots\dots\dots (2.19) \end{aligned}$$

となるのは明らかである。ここで Gauss の定理を用いて, 第2項の表面積分を体積分に直し, 少し書き変えると,

$$W_e = \int_V \{F\}^T \{\delta u\} dv + \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \right\}^T ([\sigma] \{\delta u\}) d\gamma \quad \dots\dots\dots (2.20)$$

ここで微小六面体の応力, すなわち表面力, 物体力のなす仕事として与えられるひずみエネルギーより

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} (\{u\}^T [\sigma] \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \right\} + \{u\}^T \{F\}) dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x \bullet u_x + \tau_{xy} \bullet u_y + \tau_{zx} \bullet u_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} \bullet u_x + \sigma_y \bullet u_y + \tau_{yz} \bullet u_z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy} \bullet u_x + \tau_{yz} \bullet u_y + \sigma_z \bullet u_z) \right\} dx dy dz + \frac{1}{2} (F_x \bullet u_x + F_y \bullet u_y + F_z \bullet u_z) dx dy dz \quad \dots\dots (2.21) \end{aligned}$$

(2.21)式を(2.20)式に代入し書き直すと,

$$\begin{aligned} W_e &= \int_V \{F\}^T \{\delta u\} dv + \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \right\}^T ([\sigma] \{\delta u\}) d\gamma \\ &= \int_V \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \bullet u_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \bullet u_y + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \bullet u_z \right) + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \bullet u_x + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \bullet u_y + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \bullet u_z \right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot u_x + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \cdot u_y + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \cdot u_z \right\} dv + \int_V (F_x \cdot u_x + F_y \cdot u_y + F_z \cdot u_z) dv \\
& + \int_V \left\{ \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \tau_{xy} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \tau_{zx} \right) + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \tau_{xy} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot \tau_{yz} \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \tau_{zx} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot \tau_{yz} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \sigma_z \right) \right\} dv \\
& = \int_V \left\{ \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + F_x \right) + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + F_y \right) \right. \\
& + \left. \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z \right) \right\} \{du\} dv \\
& + \int_V \left\{ \sigma_x \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \sigma_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right. \\
& + \left. \tau_{zx} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right\} dv \dots \dots \dots (2.22)
\end{aligned}$$

ここで応力の平衡方程式より

第1項は

$$\int_V \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^T [\sigma] + \{F\}^T \right\} \{du\} dv = 0$$

であり、又幾何学的条件式(ひずみ—変位関係)より

第2項は

$$\left\{ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dots, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \dots \right\}$$

より(2.22)式は次のようになる。

$$W_i = \int_V \{ \sigma_x \cdot (\delta \varepsilon_x) + \sigma_y \cdot (\delta \varepsilon_y) + \sigma_z \cdot (\delta \varepsilon_z) + \tau_{xy} \cdot (\delta \gamma_{xy}) + \tau_{zx} \cdot (\delta \gamma_{zx}) + \tau_{yz} \cdot (\delta \gamma_{yz}) \} dv \dots \dots (2.23)$$

$$W_i = \int_V \{ \sigma \}^T \{ \delta \varepsilon \} dv \dots \dots \dots (2.24)$$

(2.23)式は応力が仮想ひずみに対してなす内部仮想仕事を意味する。(2.16)式と(2.23)式とにより

$$\int_V \{F\}^T \{du\} dv + \int_{S_a} \left\{ \frac{n}{T} \right\}^T \{du\} ds = \int_V \{ \sigma \}^T \{ \delta \varepsilon \} dv \dots \dots \dots (2.25)$$

となり、物体が釣合状態にあるとき外部仮想仕事は内部仮想仕事に等しいことがわかる。

2.3 仮想仕事の原理における近似解法

— 変 位 法 —

変分原理に基礎をおく Rayleigh-Ritz 法などのように、近似解法の場合には、ひずみ関数や外力のポテンシャル(最小ポテンシャルエネルギー原理の場合)の存在を保証する必要がある。一度汎関数 Π (ポテンシャルエネルギー)の存在が保証され、しかもその最小性が保証される場合には、このような近似解法の収束性が容易に証明される。

仮想仕事の原理は(2.25)式で表わされるが、これを2次元に書き換え右辺の仮想変位仕事と

左辺第2項の境界 S_σ に対して作用する表面力の仮想変位仕事とを置き換えると

$$\iint_R (\sigma_x \cdot \delta \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \cdot \delta \gamma_{xy}) dx dy - \int_{S_\sigma} \left(T_x^n \cdot \delta u + T_y^n \cdot \delta v \right) ds = 0 \quad \dots\dots\dots (2.26)$$

いま、変位成分 u, v の解として次のような級数解を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= u_0(x, y) + \sum_{r=1}^n a_r u_r(x, y) \\ v(x, y) &= v_0(x, y) + \sum_{r=1}^n b_r v_r(x, y) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.27)$$

(2.27)式で u_0, v_0 は境界 S_u 上での幾何学的境界条件を満足し、 u_r, v_r は同境界上で "0" になるようなもの、すなわち

$$u_0 = \bar{u}, \quad v_0 = \bar{v}, \quad u_r = 0, \quad v_r = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n); S_u \text{ 上} \quad \dots\dots\dots (2.28)$$

を満足するように選ばれた適当な関数であり、 a_r, b_r は任意定数である。この場合の仮想変位として、この任意定数の仮想的な変化を考える。すなわち

$$\delta u = \sum_{r=1}^n \delta a_r u_r, \quad \delta v = \sum_{r=1}^n \delta b_r v_r \quad \dots\dots\dots (2.29)$$

この仮想変位を(2.26)式に代入して得られる式において、 $\delta a_r, \delta b_r$ が任意であることを考慮すると、最終的には次の条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \iint_R \left(\sigma_x \cdot \frac{\partial u_r}{\partial x} + \tau_{xy} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial y} \right) dx dy - \int_{S_\sigma} T_x^n u_r ds &= 0 \\ \iint_R \left(\tau_{xy} \cdot \frac{\partial v_r}{\partial x} + \sigma_y \cdot \frac{\partial v_r}{\partial y} \right) dx dy - \int_{S_\sigma} T_y^n v_r ds &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2.30)$$

(2.30)式中の応力成分を、等方性材料の平面問題としての構成方程式、ひずみ—変位関係式を用いて、変位成分のみで表わし、さらにそれらに(2.27)式を用いると $a_r, b_r (r=1, 2, \dots, n)$ に関する $2n$ 個の連立一次方程式が得られる。これを解き a_r, b_r を決定し、変位の近似解が得られる。さらにこれらの値より応力成分、ひずみ成分が計算される。

§ 3 有限要素解析

— 平面ひずみ問題の場合 —

3.1 応力—ひずみ関係 (構成方程式)

応力とひずみの関係が Hooke の法則則により次のようにあらわされる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz}, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.1)$$

今、二次元問題として、特に平面ひずみの問題とするから(3.1)式の第3式は

$\varepsilon_z = -\frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0$ となり $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ を第 1, 第 2 式に代入すると

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_x - \nu(1+\nu)\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[(1-\nu^2)\sigma_y - \nu(1+\nu)\sigma_x] \dots\dots\dots(3.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}$$

を得る。これを応力について書き直すと

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \varepsilon_x + \frac{\nu}{(1-\nu)} \varepsilon_y \right\}$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ -\frac{\nu}{(1-\nu)} \varepsilon_x + \varepsilon_y \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \gamma_{xy} \right\}$$

となり、これらをマトリックス表示すると

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, [D] = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{Bmatrix} 1 & \frac{\nu}{(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{Bmatrix}, \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$[D]$ ；平面ひずみ場における応力—ひずみマトリックス

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \dots\dots\dots(3.4)$$

となり、構成方程式を得る。

3.2 変 位 関 数

有限要素内の x 方向の変位 u 及び y 方向の変位 v を図 2 に示し、次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

$\alpha_1 \sim \alpha_6$ ；未定係数

u 及び v は x, y の一次関数である。未定係数は、要素の節点変位の節点座標によってあらわす。又上記の変位の仮定は、連続体力学における適合条件に相当する。

次にここにおける未定係数 $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6$ は次のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i \\ v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\ u_j &= \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j \\ v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\ u_k &= \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k \\ v_k &= \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

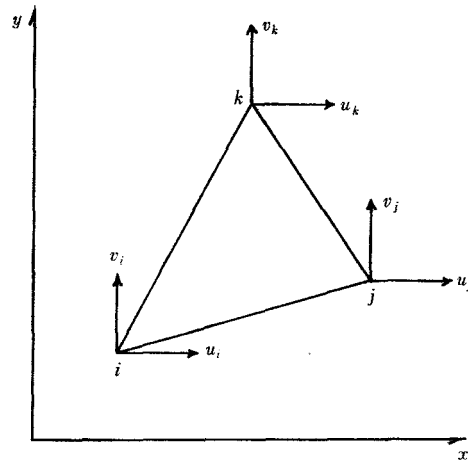


図2 三角形要素の節点変位

(3.6)式より $\alpha_1 \sim \alpha_6$ を求める。 x 方向変位 u を行列式による連立方程式より求めると、例えば(3.6)式より次の3式を取り出す。

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j$$

$$u_k = \alpha_1 + \alpha_2 x_k + \alpha_3 y_k$$

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} u_i & x_i & y_i \\ u_j & x_j & y_j \\ u_k & x_k & y_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} = \frac{(x_j y_k - x_k y_i)u_i + (x_k y_i - x_i y_k)u_j + (x_i y_j - x_j y_i)u_k}{\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}} \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

ここで三角形の面積を A とし次のようにあらわし、

$$2A = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (3.8)$$

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_k - x_k y_j, & b_i &= y_j - y_k, & c_i &= x_k - x_j \\ a_j &= x_j y_i - x_i y_k, & b_j &= y_k - y_i, & c_j &= x_i - x_k \\ a_k &= x_i y_j - x_j y_i, & b_k &= y_i - y_j, & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

とすると、(3.7)式及び α_2, α_3 は、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2A} (a_i u_i + a_j u_j + a_k u_k) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2A} (b_i u_i + b_j u_j + b_k u_k) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2A} (c_i u_i + c_j u_j + c_k u_k) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3.9)$$

となり、 y 方向変位 v についても同様に、

$$\begin{aligned}
 v_i &= \alpha_4 + \alpha_5 x_i + \alpha_6 y_i \\
 v_j &= \alpha_4 + \alpha_5 x_j + \alpha_6 y_j \\
 v_k &= \alpha_4 + \alpha_5 x_k + \alpha_6 y_k \\
 \left. \begin{aligned}
 \alpha_4 &= \frac{1}{2A} (a_i v_i + a_j v_j + a_k v_k) \\
 \alpha_5 &= \frac{1}{2A} (b_i v_i + b_j v_j + b_k v_k) \\
 \alpha_6 &= \frac{1}{2A} (c_i v_i + c_j v_j + c_k v_k)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10)
 \end{aligned}$$

となり、(3.9)、(3.10)式を(3.5)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 u &= \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k \} \\
 v &= \frac{1}{2A} \{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_k + b_k x + c_k y) v_k \}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.11)$$

となり、変位関数を得る。これをマトリックス表示すると

$$\{\delta\} = [T] \{\alpha\}$$

逆変換して

$$\{\alpha\} = [T^{-1}] \{\delta\} \dots\dots\dots (3.12)$$

となる。ただし

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix}, \quad [T^{-1}] = \frac{1}{2A} \begin{Bmatrix} x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i + x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i & 0 \\ y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i & 0 \\ 0 & x_j y_k - x_k y_j & 0 & x_k y_i - x_i y_k & 0 & x_i y_j - x_j y_i \\ 0 & y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \end{Bmatrix}$$

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix}$$

これらの未定係数 $\{\alpha\}$ と節点変位 $\{\delta\}$ との関係より、(3.12)式、節点変位—未定係数マトリックスを得る。

3.3 剛性マトリックス

先に述べた仮想仕事の原理より剛性マトリックスを求める。先ず内部仕事を計算する。応力によっ

てなされる内部仕事は単位体積当り

$$W_i = \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \dots\dots\dots (3.13)$$

応力—ひずみ関係(3.4)式を用いて

$$W_i = \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \dots\dots\dots (3.14)$$

ここでひずみ—変位関係式

$$\{\varepsilon\} = [B] [T^{-1}] \{\delta\} = [N] \{\delta\}, \quad [N] = [B] [T^{-1}]$$

$$\{\varepsilon\}^T = \{\delta\}^T [N]^T \quad \text{より}$$

(3.14)式は

$$W_i = \{\delta\}^T [N]^T [D] [N] \{\delta\} \quad \text{となり}$$

有限要素全体についての内部仕事は、

$$\{\delta\}^T \left[\iiint [N]^T [D] [N] dx dy dz \right] \{\delta\} \dots\dots\dots (3.15)$$

外部仕事は節点に働く力が節点変位に対してなす仕事であるから、

$$W_e = \{\delta\}^T \{f\} \dots\dots\dots (3.16)$$

ここに f は節点力の列ベクトルであって、次のように表わされる。

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{Bmatrix}$$

内部仕事と外部仕事が等しいから

$$\{\delta\}^T \{f\} = \{\delta\}^T \left[\iiint [N]^T [D] [N] dx dy dz \right] \{\delta\} \dots\dots\dots (3.17)$$

$\{\delta\}^T$ を両辺より消去して

$$\{f\} = \left[\iiint [N]^T [D] [N] dx dy dz \right] \{\delta\} \dots\dots\dots (3.18)$$

ここで $[\quad]$ 内が剛性マトリックスであることは明らかである。すなわち、三角形要素の剛性マトリックス $[k]$ は、

$$[k] = \iiint [N]^T [D] [N] dx dy dz \dots\dots\dots (3.19)$$

のように表わされる。三角形平板要素の板厚を一定とみなし、その値を t とすると(3.18)式の z に関する積分のかわりにおき、

$$[k] = t \iint [N]^T [D] [N] dx dy \dots\dots\dots (3.20)$$

上式で $[N]$ あるいは $[D]$ には、 x, y の項がないので(3.20)式の積分記号の中は、各要素ごとに定数となるから、三角形の面積 A をもちいて、(3.20)式はさらに簡略化し、

$$[k] = tA [N]^T [D] [N] \dots\dots\dots (3.21)$$

と表わせる。(3.31)式は6行6列の対称行列である。

ただし $[N]$ は、

$$[N] = [B][T^{-1}] = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_j - y_k & 0 & y_k - y_i & 0 & y_i - y_j & 0 \\ 0 & x_k - x_j & 0 & x_i - x_k & 0 & x_j - x_i \\ x_k - x_j & y_j - y_k & x_i - x_k & y_k - y_i & x_j - x_i & y_i - y_j \end{pmatrix}$$

又 $[B]$ は、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{と未定係数により}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix}, \quad \{\varepsilon\} = [B] \{\alpha\}$$

となるひずみ—節点変位マトリックスより与えられるものである。

3.4 全体剛性マトリックス

(3.18)式は次のように書く事が出来る。

$$\{f\} = [k] \{\delta\} \dots\dots\dots (3.22)$$

具体的に次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} f_{x_i} \\ f_{y_i} \\ f_{x_j} \\ f_{y_j} \\ f_{x_k} \\ f_{y_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.23)$$

(3.23)式で各要素における節点作用する力 $\{f\}$ と節点変位 $\{\delta\}$ との関係が求められるから、次に各節点ごとに力の釣合い方程式をつくる事により、系全体における各節点の変位 $\{\delta_i\}$ を未知数とする方程式を求めることが出来る。

すなわち、

$$[K] \{\delta_i\} = \{F\} \dots\dots\dots (3.24)$$

ここに、 $\{F\}$ は与えられた外力によりきまる列ベクトルであり、 $[K]$ は構造物全体の剛性マトリックスである。 $[K]$ 及び $\{F\}$ は既知であるから(3.24)式を逆変換して、

$$\{\delta_i\} = [K^{-1}] \{F\} \dots\dots\dots (3.25)$$

より未知の節点変位 $\{\delta_i\}$ が求められる。

§ 4 解 析 例

先の理論に基づく解析法を用い、モデル化された部分載荷を受ける地盤の変形解析を行った。

Model (I) は図3に示すようなもので y 軸を深さ方向 10cm , x 軸を水平方向 15cm とし, 境界条件は両側面は y 軸方向自由と x 軸方向は拘束した。又底面は y 軸方向拘束節点 x 軸方向自由節点と仮定した。又 Model (I) において荷重条件を2種類に分け, 等部分載荷と集中載荷とで行った。等部分載荷条件では複合地盤を仮定し, 強度定数を変化させた。すなわち地盤を2層に分け, 上部では弾性係数 $E=50$, ポアソン比 $\nu=0.2$ とし, 下部で $E=100$, $\nu=0.3$ と仮定した。集中載荷条件で $E=100$, $\nu=0.3$ の1種類とし, 等方等質条件とした。載荷量は各々 $q=1\text{kg}/\text{cm}^2$, $P=1\text{kg}$ とした。尚 Model (I) の要素数=40, 節点数=30である。結果として, σ_x , σ_y , τ_{xy} の各応力分布図, $U-V$ 変位図, $RX-RY$ 節点反力図, 最大最小主応力図等を示す。Model (II) の要素分割は図4に示す通りである。強度と変形についてより明確に検討するため要素数=213, 節点数=130に増した。又, 解析は破壊基準等を含む塑性変形にまで及ぶ弾塑性解析法によった。弾性係数 $E=12.0$, $\nu=0.35$ を取った。特に E が小さくなっている

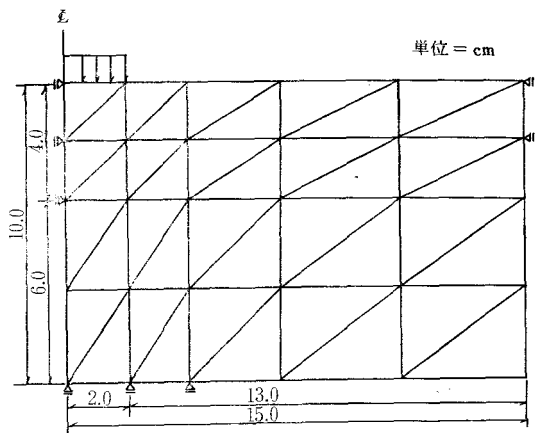


図3 解析 Model (I) の要素分割

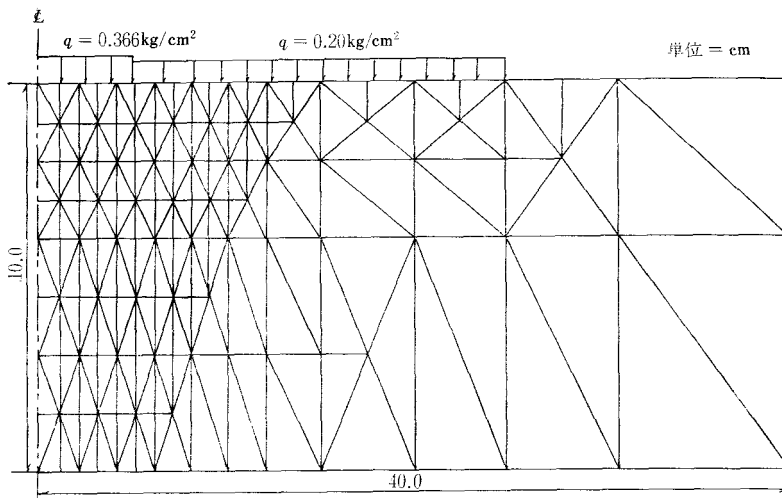
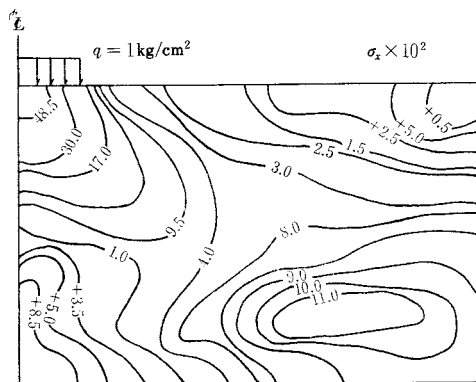
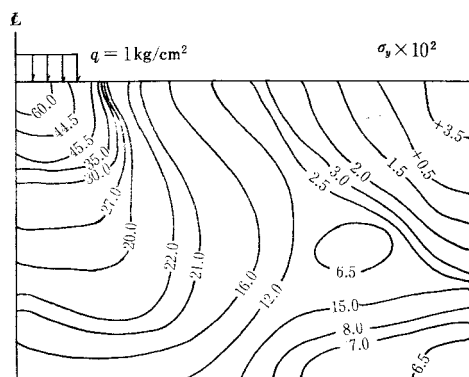


図4 解析 Model (II) の要素分割

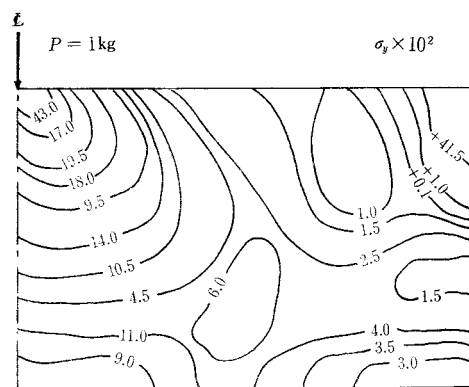
のは, 室内三軸圧縮試験より得たデータより実験の粘性土の応力-ひずみ曲線から取ったものだからである。その他, 境界条件は Model (I) と同様であるが荷重条件においてサーチャージを主荷重と連続に載荷し, 主荷重両側の地表面の盛上がりを押えて地中の応力の緩和と変形を少なくする事を目的とした。又, 載荷重は主荷重で $q=0.366\text{kg}/\text{cm}^2$, サーチャージで $q=0.2\text{kg}/\text{cm}^2$ と小さな量であるが, 弾性域から塑性域への土の挙動を見るため少しずつの荷重量を増加させながら繰り返して計算を行うため初期の弾性計算の段階では荷重量がこんなに小さくなっている。なお, 結果として Model (I) と同様の他, ε_x , ε_y , γ_{xy} のひずみ分布図, 塑性域発達状況も図示することが出来る。今回は弾塑性域に限るためその一部を検討し, その他の詳細は次回に譲る。

§ 5 結果と考察

等部分载荷条件として Model (I) の解析結果の最初に図5を示す。これは σ_x の応力分布であるがセンターラインの荷重直下においてかなり大きな応力値がみられる。順次载荷面より遠くなるにつれ応力の減少がみられる。又、载荷地点と対角位置に応力の等圧線の渦がみられ、大きな値を示している。载荷端部にはかなり密な等圧線が現われ急激な変化がみられ明らかに応力の集中を起こしている。さらに右上部、左下部に引張応力を示し、複雑な応力変化を示しているが、変位図等より、右上部の引張応力域は地表面の盛り上がりを示しているものと考えられる。図6は σ_y の応力分布を示す。

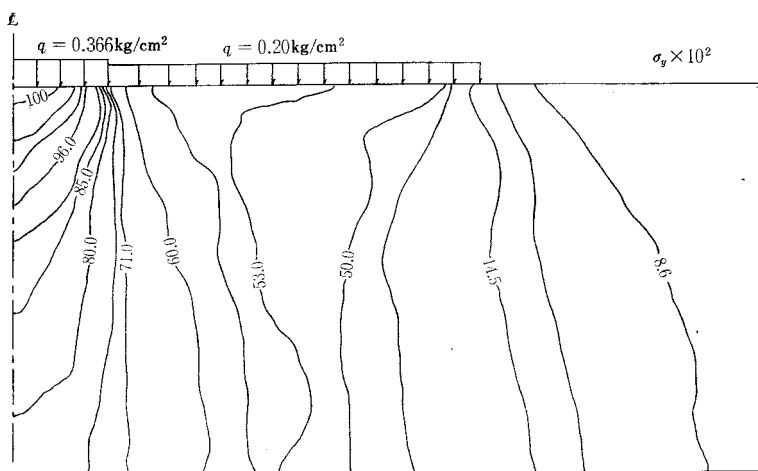
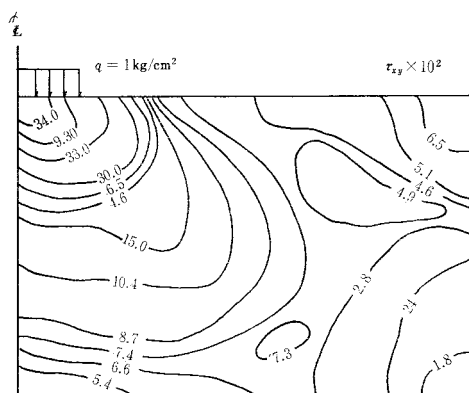
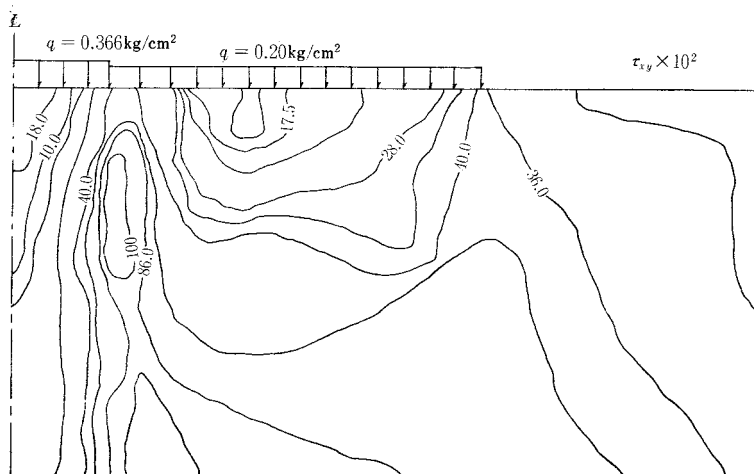
図5 σ_x の応力分布 (Model I)図6 σ_y の応力分布 (Model I)

σ_x と同様に载荷直下に大きな応力値を示し、特に等圧線が地盤底部まで等間隔にかつゆるやかに応力の伝播を示し、又若干、側方底部に応力集中がみられ、右上部には σ_x よりわずかに減少するが引張応力により押し上げがみられる。図7で集中载荷重における σ_y 分布をみると等分布荷重に比べ载荷直下の応力値が減少し、又伝播する応力値も急激に低下しているのがわかる。又、等分布载荷との応力値の比較で垂直方向1/2位置で50%の応力減少となっている。又、応力分布図においても応力球根が地盤中央までは到達することとはなく、载荷点より各隅角部

図7 σ_y の応力分布 (Model I)

に応力分布が複雑化し応力の分散現象を起している。次に示す図8は Model (II) の σ_y の応力分布である。サーチャージには $q = 0.2 \text{ kg/cm}^2$ をX方向に2/3の距離までかけた。 σ_y 分布はY軸と平行に深く伸び主荷重とサーチャージの接点で応力の集中がみられる。Model (I) に比べ圧力球根が、载荷直下で垂直に伸びサーチャージの影響が大であると思われる。図9は Model (I) の τ_{xy} の応力分布である。等応力線は水平方向にやや流れるように分布し、垂直方向に浅くなり、水平方向にゆるやかに伸びている。又、载荷端よりやや離れて、応力の集中を起こしている。又サーチャージの有無により地盤内の応力変化を Model (I), (II) を比較すると、サーチャージ幅効果はサーチャージ下方でせん断応力を緩和し、等応力線を遠くまで水平に伸ばす。

次に、Model (II) の τ_{xy} の応力分布で図10に示す。Model (I) と比較して述べると主荷重端で大きな等応力線が地盤中に現われ、サーチャージとの接点のせん断変形を意味している。又サーチャージ中央部に引張応力が現われているが、サーチャージの有効性を示しているものと考えられる。図11は

図8 σ_y の応力分布 (Model II)図9 τ_{xy} の応力分布 (Model I)図10 τ_{xy} の応力分布 (Model II)

集中荷の τ_{xy} 分布である。等部分荷荷に比較し応力球根がいく分小さくなるのは荷荷量によるので当然と言える。又、荷荷点の対角比において応力球根が顕著に出ている。又、荷荷点よりいく分離れた所より等応力線が水平に右端へ向う流れている。図12はModel (I) の等部分荷荷における節点変位量を図示したものである。荷荷直下においてY方向深さの全量に対して20%の変位量を程している。やがて、深さ方向に徐々に減少し1/2深さで8%変位量となり底部近くで3%となっている。荷荷部

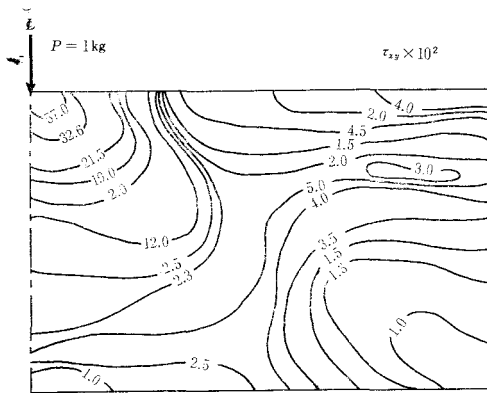


図11 τ_{xy} の応力分布 (Model I)

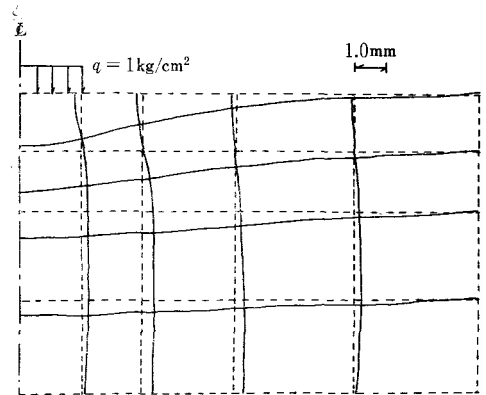


図12 節点変位U-V量

よりX方向へと離れるにしたがって地表面の荷荷端部では1~2%変位量を程し、1/4距離で3%と増加し、1/2距離で2%, 3/4地点で0.8%となる。又Y方向に1/5深さの地中部で変位 $u=0$ よりマイナスの変位から、プラスの変位へ切り換え点を程し、以後深さ方向でプラス方向へとU変位が増加する。この増加量はY方向中心部で最も大きな値を示し、4%~5%のu変位を示す。図の右側地表面に盛り上がりのV変位を示す。これは σ_x , σ_y の分布図における引張り応力の現象を程するものと一致している。やはりこれも深さ方向で減少している。図13は集中荷重におけるU-V変位であるが、荷荷直下

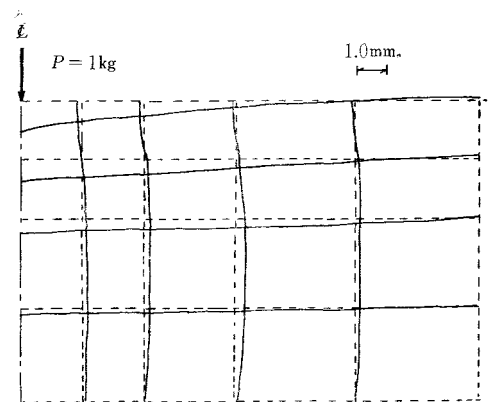


図13 節点変位U-V量

で10%のV変位を程しているが、等部分荷荷の場合の1/2変位量となっている。U変位も地表面、底部とも等部分荷荷よりも値は小さくなっている。又、V変位の右地表面での盛り上がり地表面部水平距離において、等部分荷荷より長くなっている。これは σ_y 分布の隅角部での応力分散、 τ_{xy} 分布の等せん断応力線の水平流れの影響等によるものと考えられる。図14はサーチャージを施した場合のU-V変位であるが、主荷重直下のY変位が大きく、サーチャージにより変位量が安定化される。しかし右地表面で1%~2%の盛り上がりを見せ、Model (I)と比較して、主荷重点よりかなり遠距離に現われる事によりサーチャージの効果を見ることが出来る。X変位量はModel (I)と比べかなり複雑化し、サーチャージ中央部で最大値を示して2%の変位が出ている。これは主荷重によるクサビ変形より側方変位の移動と考えられる。図15は等部分荷荷における節点反力RX-RY図である。荷荷直下でY方向反力RYは1.0を示し、第3節点でほぼ“0.”となる。又、底辺部で荷荷量の20~30%のマイナスの反力値を程し、荷荷底部より遠くなるにつれて若干減少していく。X方向反力RX値は荷荷部で80%の反力値を示し深さ方向に2/3程度までプラス側で減少し、その後マイナスに転じ少しふく

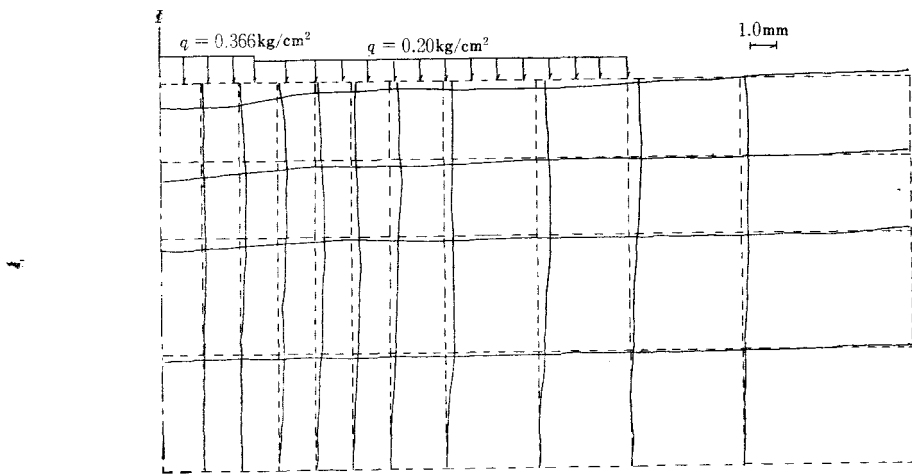


図14 節点変位U—V量

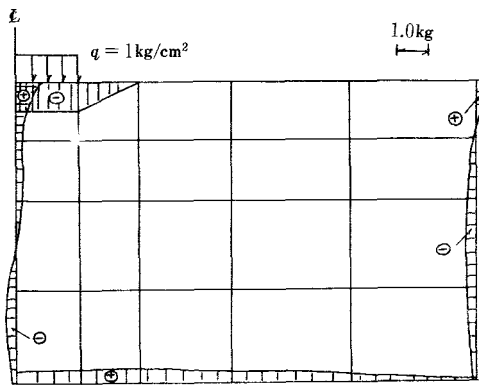


図15 節点反力RX—RY分布

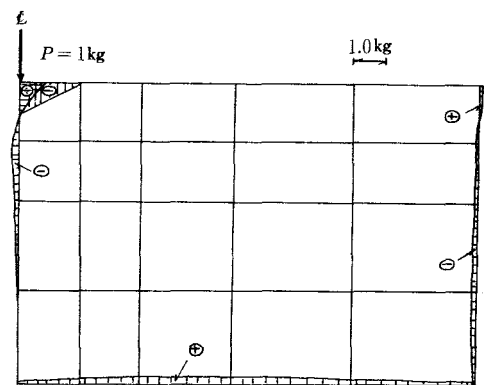


図16 節点反力RX—RY分布

らみをもち、底辺隅角節点で10%程度の反力値を示す。右側面では30%の反力値であるが間もなくマイナスに変わりゆるやかな曲線で第30節点に近ずき、10%の反力値を示している。第6、第25節点の隅角部の(－)反力は応力分布図、変位図からも理解出来る現象である。図16は集中荷重の場合のRX—RY図である。載荷部直下でRY反力は第1節点が最大値をとる。底辺部でプラス反力20%程度を示し、第30節点までゆるやかに減少しつつ伸びている。両側面でのRX反力は載荷部直下において地表面では0.7%の反力を程し、間もなくマイナスに転じゆるやかに底部に向い“0”反力となり、等部分載荷とかなり違っている。右側面の値は低いものの形は類似している。載荷条件により種々差違が見られる。図17はModel (II)の弾塑性解析の具体的な結果で斜線を施した要素が塑性域に達した要素である。主荷重直下において塑性域が拡がりを見せ、地中深さ方向に減少している。又、主荷重地表面ではまだ弾性域となっているのは応力図等より応力集中が主荷重、サーチャージ接点に起こり応力伝播域よりそれているためと考えられる。ここで弾塑性解析における剛性マトリックスについて若干の検討を加えると、有限要素マトリックス法を弾性問題から降伏点を越えて弾塑性問題に拡張する場合、弾性問題におけるHookeの法則は

$$\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}'}{2G} + \delta_{ij}(1-2\nu) \frac{\sigma_{ii}}{3E} \dots\dots\dots (5.1)$$

で与えられる。 E と G は縦及び横弾性係数、 ν はポアソン比、 $\sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ 、 σ_{ij}' は偏差応力、

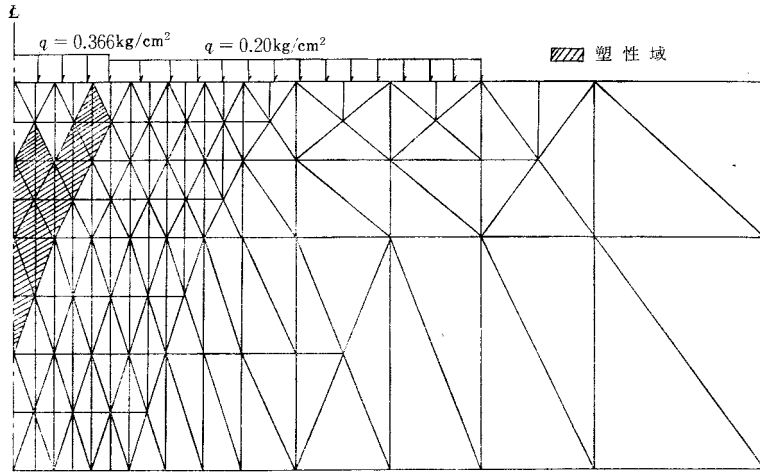


図17 塑性域分布

そして δ_{ij} はクロネッカのデルタ記号を表わす。(5.1) 式を σ_{ij} について解き、その結果をマトリックスの形で表示すれば、

$$\sigma = 2G \mathbf{D}^e \varepsilon = \frac{E}{1+\nu} \mathbf{D}^e \varepsilon \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

となり、 σ と ε は σ_{ij} と ε_{ij} を成分とする列マトリックスを表わす。

次に弾塑性問題における Reuss 式と剛性マトリックスの関係をみると降伏条件として Mises の条件を選び応力-ひずみ関係式は Reuss の式で与えられるものとする。Reuss の式で、ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ の偏差成分 $d\varepsilon_{ij}'$ は

$$d\varepsilon_{ij}' = \sigma_{ij}' d\lambda + \frac{d\sigma_{ij}'}{2G}, \quad d\lambda = \frac{3}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}^p}{\bar{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{d\sigma}{\sigma H'} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

σ_{ij}' は偏差応力、 $H' = \frac{d\sigma}{d\bar{\varepsilon}^p}$ 、 $\bar{\sigma}$ と $\bar{\varepsilon}^p$ は各々相当応力と相当塑性ひずみ増分をあらわし

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}'}, \quad \bar{\varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

となり、一方において Mises の降伏条件とその微分形は

$$\sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2, \quad \sigma_{ij}' d\sigma_{ij}' = \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{4}{9} \bar{\sigma}^2 H' d\lambda \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

(5.3) 式と (5.5) 式を $d\sigma_{ij}'$ と $d\lambda$ について解き、 $d\varepsilon_{ij}'$ 又は $d\varepsilon_{ij}$ の関数として表わせば

$$d\lambda = \frac{\sigma_{ij}' d\varepsilon_{ij}'}{S} = \frac{\sigma_{ij}' d\varepsilon_{ij}}{S}, \quad S = \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \left(1 + \frac{H'}{3G} \right) \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

$$d\sigma_{ij}' = 2G \left(d\varepsilon_{ij}' - \sigma_{ij}' \frac{\sigma_{kl}' d\varepsilon_{kl}}{S} \right) \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

ただし、(5.7) 式では添字記号の互換性を用い、スカラー量 $d\lambda$ を $d\lambda = \frac{\sigma_{kl}' d\varepsilon_{kl}}{S}$ と書き表わしている。

偏差ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}'$ が定義により

$$d\varepsilon_{ij}' = d\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ii}}{3}, \quad d\varepsilon_{ii} = d(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \dots (5.8)$$

で与えられることを用いると

$$d\sigma_{ij}' = 2G \left(d\varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{d\varepsilon_{ii}}{3} - \sigma_{ij} \frac{\sigma_{kl}' d\varepsilon_{kl}}{S} \right) \dots (5.9)$$

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= d\sigma_{ij}' + \frac{E}{3(1-2\nu)} \delta_{ij} d\varepsilon_{ii} = d\sigma_{ij}' + \frac{2}{3} \frac{(1+\nu)G}{(1-2\nu)} \delta_{ij} d\varepsilon_{ii} \\ &= 2G \left(d\varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} d\varepsilon_{ii} - \sigma_{ij} \frac{\sigma_{kl}' d\varepsilon_{kl}}{S} \right) \dots (5.10) \end{aligned}$$

(5.10)式をマトリックスの形で書けば

$$d\sigma = 2G \mathbf{D}^p d\varepsilon = \frac{E}{1+\nu} \mathbf{D}^p d\varepsilon \dots (5.11)$$

\mathbf{D}^p は弾性問題における \mathbf{D}^e に代わるもので次のように与えられ

$$\mathbf{D}^p = \begin{pmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_x'^2}{S} & & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_x' \sigma_y'}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_y'^2}{S} & & & \\ \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_x' \sigma_z'}{S} & \frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_y' \sigma_z'}{S} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} - \frac{\sigma_z'^2}{S} & & \\ -\frac{\sigma_x' \tau_{xy}}{S} & -\frac{\sigma_y' \tau_{xy}}{S} & -\frac{\sigma_z' \tau_{xy}}{S} & \frac{1}{2} - \frac{\tau_{xy}^2}{S} & \\ -\frac{\sigma_x' \tau_{yz}}{S} & -\frac{\sigma_y' \tau_{yz}}{S} & -\frac{\sigma_z' \tau_{yz}}{S} & -\frac{\tau_{xy} \tau_{yz}}{S} & \frac{1}{2} - \frac{\tau_{yz}^2}{S} \\ -\frac{\sigma_x' \tau_{zx}}{S} & -\frac{\sigma_y' \tau_{zx}}{S} & -\frac{\sigma_z' \tau_{zx}}{S} & -\frac{\tau_{xy} \tau_{zx}}{S} & -\frac{\tau_{yz} \tau_{zx}}{S} & \frac{1}{2} - \frac{\tau_{zx}^2}{S} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{SYM} \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (5.12)$$

となる対称マトリックスである。

簡単に剛性マトリックスを説明したが、弾性問題の \mathbf{D}^e を \mathbf{D}^p におきかえるならば、弾塑性問題の取扱いもまったく同様であることがわかる。ただし弾性問題では、応力やひずみの増分を考え、刻々の弾塑性境界を求め、塑性状態に達した要素の \mathbf{D}^p 、さらに物体全体に関する剛性マトリックス \mathbf{K}^p を修正してゆかねばならない。

§ 6 結 言

本稿の結論として次の事柄が言える。

- (1) 応力分布図の場合、 σ_y と τ_{xy} 図が地盤の挙動を明確に表現している。
- (2) σ_y 、 τ_{xy} の等部分載荷と集中載荷との比較で σ_y について前者では載荷直下より垂直方向に深くかつ等間隔に伝っている。後者では分布が複雑化し応力の分散現象が見られる。
- (3) 節点変位 $U-V$ 図では等部分載荷では載荷地表部の V 変位量と底辺 U 変位量が集中載荷より大きく、又右地表部の盛り上がり変位は前者では載荷部より遠方で生じ上向きの水平距離も後者より短かくなっている。

- (4) サーチャージの幅効果ではサーチャージにより、せん断応力を緩和し等応力線を遠方へ水平に伸ばす。
- (5) 変位図、応力分布図より、スベリ面は高い応力部分より発生して荷重の増加と共に次第に周辺へ広がっていく。すなわち進行性破壊の形をとる。
- (6) 地盤の変位が大きくなり、破壊状態に近くなると、載荷部の両側の地表面が盛り上がってくるが、これは回転スベリによるものではなくて、側方へのクサビの押込みによる押し上げであろうと思われる。

地盤が荷重を受けるときの内部の様子について一般的に考える時、応力が比較的小さい間は弾性論が適用されるところでもよいので応力、ひずみの分布は理論的に計算されることになるが、この際必要な定数は E と ν である。ところで普通の弾性材料では E 、 ν はある一定値をとるが、土は E が応力過程と共に変化する。土にせん断変形に伴って体積が膨脹したり、収縮したりする。いわゆるダイレイタンスイ（Dilatancy）現象があるために、 ν が複雑に変化し、それに伴って内部応力も弾性論と違った分布をすることになる。又もう一つの重要なファクターとして、土が連続体でないために生じる理論とのギャップをどのように取扱うか。すなわち、応力—ひずみの非線形性について十分考慮しないと正しい結果が得られないことがわかった。今後は、今述べた弾塑性挙動、又時間依存における粘弾性挙動いわゆるクリープ解析等を課題とし、土の変形理論を進めて行きたい。本研究の数値計算は広島大学計算機センターの TOSBAC-3400 を用いて行った。

最後に本研究の遂行にあたり、広島大学院生松島卓己氏（現不動建設）より有益な助言をいただいた事を記し、ここに深く感謝致します。

参 考 文 献

- 1) H. Aboshi : Stability of Soft Clay Foundations Underneath Embankment, Consolidated by Means of Card-Board Drains. Soils and Foundations, Vol. 9, No. 2 p. 1—14, 1969
- 2) 網干・松島：押え盛土の設計法に関する基礎的研究，第10回土質工学研究発表会，p. 463, 1975
- 3) 網干・小堀：軟弱地盤の変形解析に関する基礎的研究，第28回土木学会中国四国支部大会一般講演概要集，p. 105, 1976
- 4) P.V. Marcal : Int. J. Mech. Sci, 7 p. 229, 1965
- 5) Hill, R. : The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford Press, p. 50—69, 1950
- 6) 山田：塑性・粘弾性（コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-2），培風館，p. 59—71, 1972
- 7) Zienkiewicz, O.C. : The finite Element Method in Engineering Science, Mc Graw-Mill, p. 50—61, 1971
- 8) 山田：塑性力学，日刊工業新聞社，pp. 66—95, 1965
- 9) S.P. Timoshenko, J.N. Goodier : Theory of elasticity, Mc Graw-Hill p. 235—258, 1970

（昭和51年11月1日受付）

曲げをうける薄板の境界値問題の 1 例

(土木工学科) 丸 上 晴 朗

An Example of Boundary-value Problems on Bending of Thin Plate

Seirō MARUGAMI

Equations which represent deflection surfaces of thin simply supported and partially loaded rectangular plate shown in fig. 1 are derived, in this study. The deflection surfaces are represented by three equations (41), (42) and (43). These three equations are essential to us, if we want to fully research stress distributions owing to passing cars in the reinforced concrete slabs of highway bridges.

§ 1 ま え が き

曲げをうける薄板の変形や応力を論ずる問題は古くからある問題である。従って今日までに既に多くの成果がいろいろと発表されている¹⁾。さらに便覧や公式集などには各種の場合について数多くの計算結果が数表としてあるいは公式として示されている。板の形が長方形である場合は理論的に取扱いが簡単であることと形状が実用性に富むという両面的理由から、板の支持条件、荷重条件をいろいろと変えた場合の各々について理論解が求められている。

周辺全部が単純支持されている板に部分的に等分布荷重が作用する場合を考える。荷重条件を正確に表現すると鉛直等分布荷重が板の部分的領域に存在しこの部分的領域の形状が長方形であり、荷重の作用する領域が任意である場合である。図 1 参照。この例については二重フーリエ級を応用した有名な Navier の理論解がある。しかし単一級数による理論解は手近に利用できる便覧などには示されていないようである。本文においては単一級数による理論解を示す。なお、板は等方性板とした。

§ 2 周辺全部が単純支持された長方形板上の任意の部分的長方形領域に等分布荷重が作用するときの単一級数によるたわみ曲面の解

図 1 の斜線部分に等分布荷重が作用するものとし、斜線部長方形の図心の座標を (ξ, η) とする。薄板のたわみ曲面は次の式(1)を満足する。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここに q は任意点 (x, y) に作用する荷重の強度であり D は板の曲げ剛性である。

(1) を満足する解を Lévy²⁾ にならって次のように定める。但し Y_m は y のみの関数である。

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \dots\dots\dots (2)$$

図 1 の等分布荷重をフーリエ級数で表示するために図 2 で示される関数を考える。図 2 の関数を

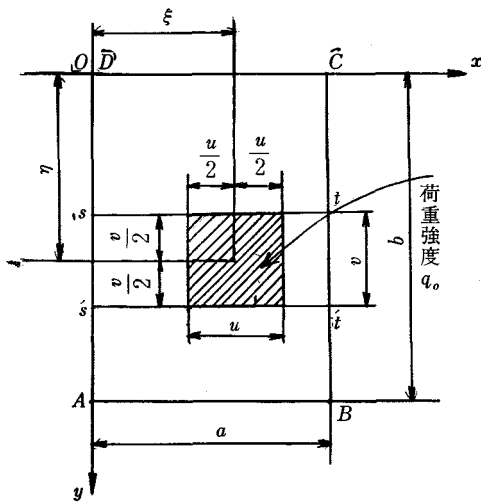
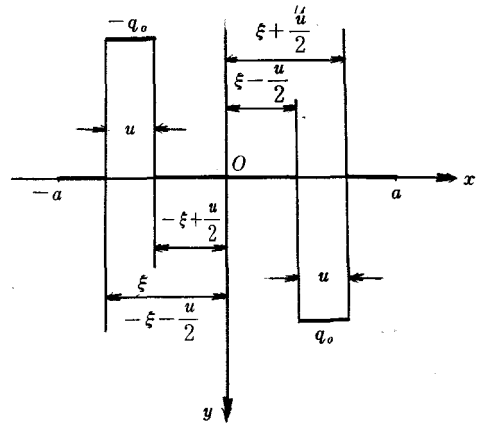


図1 等分布荷重をうける長方形板 ABCD

図2 分布荷重 $q(x)$

$-a \leq x \leq a$ の範囲でフーリエ級数に展開し、この級数を $0 \leq x \leq a$, $\eta - \frac{v}{2} \leq y \leq \eta + \frac{v}{2}$ の領域において適用すると図1の等分布荷重を示している。

図2の関数をフーリエ級数に展開すると、

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{a}$$

となる。

b_m は $X = \frac{\pi}{a}x$ とおいて次のようになる。

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(X) \sin mX \, dX \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^a q \left(\frac{\pi}{a}x \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \frac{\pi}{a} dx \\ &= \frac{2}{a} \int_{\xi - \frac{u}{2}}^{\xi + \frac{u}{2}} q_0 \sin \frac{m\pi x}{a} dx \\ &= \frac{4q_0}{m\pi} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \end{aligned}$$

よって $q(x)$ は式(3)となる。

$$q(x) = \frac{4q_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \dots\dots\dots(3)$$

図1において板のたわみ曲面が満足するべき式は(1)から次の三通りに区分できる。

(i) $0 \leq y \leq \eta - \frac{v}{2}$ のとき：

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

(ii) $\eta - \frac{v}{2} \leq y \leq \eta + \frac{v}{2}$ のとき：

$w = w'$ とおき、(3)を適用して次式になる。

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial^4 w'}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w'}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w'}{\partial y^4} \\ & = \frac{4q_0}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

(iii) $\eta + \frac{v}{2} \leq y \leq b$ のとき：

$w = w''$ とおく。

$$-\frac{\partial^4 w''}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w''}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w''}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(4), (5), (6)を満足する w , w' , w'' は式(2)を用いてそれぞれ以下のようにして求める。

先ず(4)の w を求める。(2)の右边を(4)に代入して次の式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

この式が任意の x について成立するためには

$$\frac{d^4 Y_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 Y_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 Y_m = 0$$

が成立しなければならない。

この式の一般解 Y_m は

$$\begin{aligned} Y_m = & \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ & \left. + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

となる。よって(4)を満足する w は次のようになる。

$$\begin{aligned} w = & \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ & \left. + C_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

次は(5)の w' を求める。 w_1' を(5)の特殊解, w_2' を(5)の右边が0になったときの一般解とすると,

$$w' = w_1' + w_2' \dots\dots\dots (9)$$

となる。

w_1' は y に無関係であるとするれば(5) から w_1' は次式を成立させる。

$$-\frac{\partial^4 w_1'}{\partial x^4} = \frac{4q_0}{\pi D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

よって,

$$w_1' = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \dots\dots\dots (10)$$

w_2' は(8)を求めたときと全く同様であるので、

$$w_2' = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m' \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m' \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m' \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m' \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \cdots (11)$$

となる。よって w' は(12)のとうりである。

$$w' = \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m + A_m' \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m' \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m' \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m' \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \cdots (12)$$

但し、

$$a_m = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \cdot \frac{1}{m^5} \cdot \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \quad \cdots (13)$$

である。

最後に(6)の w'' であるが(4)の w と同様であるので、

$$w'' = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m'' \cosh \frac{m\pi y}{a} + B_m'' \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m'' \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m'' \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad \cdots (14)$$

となる。

以上のことより図1の荷重状態にある板のたわみ曲面は、(8)、(12)、(14)で示される。これらの式には未知係数 A_m , B_m , \cdots , D_m'' が含まれているのでこれらの値を求めなければならない。これらを求めるための境界条件式、力学的条件式等は以下になる。なお $x=0$, $x=a$ における境界条件即ちたわみと曲げモーメント M_x がともに0になるという条件は、たわみ曲面を(2)のように定めているので、すでに満足されている。

CD 上の w に関する条件式：

$w=0$ であるから、(8)において $y=0$ として式(15)を得る。

$$A_m = 0 \quad \cdots (15)$$

曲げモーメント $M_y=0$ であるが、この条件は次のように表現できる。 CD 上で w を考えると $w(x, y)=0$ であるので、 $(\partial^2 w / \partial x^2)_{y=0}=0$ となる。よって、

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = -D \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

となる。

(8)から $\partial^2 w / \partial y^2$ を計算すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m + 2B_m) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cosh \frac{m\pi y}{a} + (C_m + 2D_m) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + B_m \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 y \cosh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \end{aligned}$$

となり、この式において $y=0$ として、 $A_m + 2B_m = 0$ を得るが(15)から $A_m = 0$ ゆえ、

$$B_m=0 \dots\dots\dots(16)$$

が $M_y=0$ より得られる。

st 上の w と w' に関する条件式：

st 上では $w=w'$ であるから(8)と(12)の y に $\eta-v/2$ を代入して次の式を得る。

$$C_m \sinh \alpha_m + D_m \alpha_m \cosh \alpha_m = a_m + A_m' \cosh \alpha_m \\ + B_m' \alpha_m \sinh \alpha_m + C_m' \sinh \alpha_m + D_m' \alpha_m \cosh \alpha_m \dots\dots\dots(17)$$

但し、

$$\alpha_m = \frac{m\pi(2\eta-v)}{2a} \dots\dots\dots(18)$$

とする。

接線の連続性から $\partial w/\partial y = \partial w'/\partial y$ であるので次の条件式を得る。

$$C_m \cosh \alpha_m + D_m (\cosh \alpha_m + \alpha_m \sinh \alpha_m) = A_m' \sinh \alpha_m + B_m' (\sinh \alpha_m + \alpha_m \cosh \alpha_m) \\ + C_m' \cosh \alpha_m + D_m' (\cosh \alpha_m + \alpha_m \sinh \alpha_m) \dots\dots\dots(19)$$

w から求まる曲げモーメントを M_y , w' から求まる曲げモーメントを M_y' とすれば st 上では $M_y = M_y'$ である。 st 上では $w(x, y) = w'(x, y)$ であるので、 $\partial^2 w/\partial x^2 = \partial^2 w'/\partial x^2$ となり $M_y = M_y'$ なる条件式は $\partial^2 w/\partial y^2 = \partial^2 w'/\partial y^2$ となる。この式で $y = \eta - \frac{v}{2}$ とすれば次式を得る。

$$C_m \sinh \alpha_m + D_m (2 \sinh \alpha_m + \alpha_m \cosh \alpha_m) = A_m' \cosh \alpha_m \\ + B_m' (2 \cosh \alpha_m + \alpha_m \sinh \alpha_m) + C_m' \sinh \alpha_m + D_m' (2 \sinh \alpha_m + \alpha_m \cosh \alpha_m) \dots\dots\dots(20)$$

せん断力についても上の曲げモーメントの場合と同様の関係が成立し、 $Q_y = Q_y'$ から $\partial^3 w/\partial y^3 = \partial^3 w'/\partial y^3$ となる。

(15), (16)から $A_m = B_m = 0$ ゆえ、

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (C_m + 3D_m) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \cosh \frac{m\pi y}{a} + D_m \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

となり、

$$\frac{\partial^3 w'}{\partial y^3} = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ (A_m' + 3B_m') \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \sinh \frac{m\pi y}{a} + (C_m' + 3D_m') \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\ \left. + B_m' \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 y \cosh \frac{m\pi y}{a} + D_m' \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right\} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

となる。この両式において $y = \eta - \frac{v}{2}$ とすると

$$C_m \cosh \alpha_m + D_m (3 \cosh \alpha_m + \alpha_m \sinh \alpha_m) = A_m' \sinh \alpha_m \\ + B_m' (3 \sinh \alpha_m + \alpha_m \cosh \alpha_m) + C_m' \cosh \alpha_m + D_m' (3 \cosh \alpha_m + \alpha_m \sinh \alpha_m) \dots\dots\dots(21)$$

以上の(17), (19), (20), (21)を A_m' , B_m' , C_m' , D_m' に関する連立方程式とみなして解くと次のようになる。

$$A_m' = a_m \left(\frac{\alpha_m}{2} \sinh \alpha_m - \cosh \alpha_m \right) \dots\dots\dots(22)$$

$$B_m' = \frac{a_m}{2} \cosh \alpha_m \dots\dots\dots (23)$$

$$C_m' = C_m - a_m \left(\frac{\alpha_m}{2} \cosh \alpha_m - \sinh \alpha_m \right) \dots\dots\dots (24)$$

$$D_m' = D_m - \frac{a_m}{2} \sinh \alpha_m \dots\dots\dots (25)$$

✓ $s't'$ 上の w' と w'' に関する条件式:

$w' = w''$ より, (17)を導いたのと同様にして(26)を得る。

$$\begin{aligned} & a_m + A_m' \cosh \beta_m + B_m' \beta_m \sinh \beta_m + C_m' \sinh \beta_m + D_m' \beta_m \cosh \beta_m \\ & = A_m'' \cosh \beta_m + B_m'' \beta_m \sinh \beta_m + C_m'' \sinh \beta_m + D_m'' \beta_m \cosh \beta_m \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

但し,

$$\beta_m = \frac{m\pi(2\eta + v)}{2a} \dots\dots\dots (27)$$

とする。

$\partial w'/\partial y = \partial w''/\partial y$ より, (19)を導いたのと同様にして(28)を得る。

$$\begin{aligned} & (A_m' + B_m') \sinh \beta_m + (B_m' \beta_m + C_m' + D_m') \cosh \beta_m + D_m' \beta_m \sinh \beta_m \\ & = (A_m'' + B_m'') \sinh \beta_m + (B_m'' \beta_m + C_m'' + D_m'') \cosh \beta_m + D_m'' \beta_m \sinh \beta_m \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

$M_y' = M_y''$ なる条件式からは, (20)を導いたのと同様にして(29)を得る。

$$\begin{aligned} & (A_m' + 2B_m') \cosh \beta_m + (C_m' + 2D_m') \sinh \beta_m + B_m' \beta_m \sinh \beta_m + D_m' \beta_m \cosh \beta_m \\ & = (A_m'' + 2B_m'') \cosh \beta_m + (C_m'' + 2D_m'') \sinh \beta_m + B_m'' \beta_m \sinh \beta_m + D_m'' \beta_m \cosh \beta_m \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

$Q_y' = Q_y''$ なる条件式からは, (21)を導いたのと同様にして(30)を得る。

$$\begin{aligned} & (A_m' + 3B_m') \sinh \beta_m + (C_m' + 3D_m') (\cosh \beta_m + B_m' \beta_m \cosh \beta_m + D_m' \beta_m \sinh \beta_m) \\ & = (A_m'' + 3B_m'') \sinh \beta_m + (C_m'' + 3D_m'') \cosh \beta_m + B_m'' \beta_m \cosh \beta_m + D_m'' \beta_m \sinh \beta_m \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

AB 上の w'' に関する条件式:

$w'' = 0$ であるから, 式(14)で $y = b$ として(31)を得る。

$$A_m'' \cosh \frac{m\pi b}{a} + B_m'' \frac{m\pi b}{a} \sinh \frac{m\pi b}{a} + C_m'' \sinh \frac{m\pi b}{a} + D_m'' \frac{m\pi b}{a} \cosh \frac{m\pi b}{a} = 0 \dots\dots\dots (31)$$

$M_y'' = 0$ であるから, (16)を導いたのと同様にして(32)を得る。

$$\begin{aligned} & (A_m'' + 2B_m'') \cosh \frac{m\pi b}{a} + (C_m'' + 2D_m'') \sinh \frac{m\pi b}{a} \\ & + B_m'' \frac{m\pi b}{a} \sinh \frac{m\pi b}{a} + D_m'' \frac{m\pi b}{a} \cosh \frac{m\pi b}{a} = 0 \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

以上の(26), (28), (29), (30)の方程式に含まれる A_m' , B_m' , C_m' , D_m' にそれぞれ(22), (23), (24), (25)の右辺を代入すると C_m , D_m , A_m'' , B_m'' , C_m'' , D_m'' に関する方程式となる。これら4つの式と(31), (32)を合せて考え, C_m , D_m , A_m'' , B_m'' , C_m'' , D_m'' を求めると次のようになる。

$$C_m = a_m \left(\frac{\alpha_m}{2} \cosh \alpha_m + \sinh \beta_m - \sinh \alpha_m - \frac{\beta_m}{2} \cosh \beta_m \right) \\ + \frac{a_m}{2} \left(-\frac{m\pi b}{a} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} - \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \dots\dots\dots (33)$$

$$D_m = -\frac{a_m}{2} \left(\sinh \alpha_m - \sinh \beta_m - \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \dots\dots\dots (34)$$

$$A_m'' = \frac{a_m}{2} (\alpha_m \sinh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m) \dots\dots\dots (35)$$

$$B_m'' = -\frac{a_m}{2} (\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m) \dots\dots\dots (36)$$

$$C_m'' = \frac{a_m}{2} \left(\frac{m\pi b}{a} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} - \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \dots\dots\dots (37)$$

$$D_m'' = -\frac{a_m}{2} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \dots\dots\dots (38)$$

以上の結果から C_m' , D_m' は次のようになる。

$$C_m' = a_m \left(\sinh \beta_m - \frac{\beta_m}{2} \cosh \beta_m \right) \\ + \frac{a_m}{2} \left(\frac{m\pi b}{a} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} - \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \dots\dots\dots (39)$$

$$D_m' = -\frac{a_m}{2} \left(\sinh \beta_m + \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \dots\dots\dots (40)$$

従ってたわみ曲面の式は次のようになる。

$0 \leq y \leq \eta - v/2$ のとき：

$$w = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ \times \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{2} \cosh \alpha_m + \sinh \beta_m - \sinh \alpha_m - \frac{\beta_m}{2} \cosh \beta_m \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(-\frac{m\pi b}{a} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} - \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \right\} \\ \times \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2} \left(\sinh \alpha_m - \sinh \beta_m - \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \dots\dots\dots (41)$$

$\eta - \frac{v}{2} \leq y \leq \eta + \frac{v}{2}$ のとき :

$$\begin{aligned}
 w' = & \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \\
 & \times \left\{ 1 + \left(\frac{\alpha_m}{2} \sinh \alpha_m - \cosh \alpha_m \right) \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{1}{2} \cosh \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 & + \left\{ \sinh \beta_m - \frac{\beta_m}{2} \cosh \beta_m \right. \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{m\pi b}{a} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} - \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \Big\} \\
 & \times \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{2} \left(\sinh \beta_m + \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \Big\} \dots\dots\dots (42)
 \end{aligned}$$

$\eta + \frac{v}{2} \leq y \leq b$ のとき :

$$\begin{aligned}
 w'' = & \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \\
 & \times \left\{ \frac{1}{2} (\alpha_m \sinh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m) \cosh \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 & + \frac{1}{2} (\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m) \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{m\pi b}{a} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} - \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \\
 & \times \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{2} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \Big\} \dots\dots\dots (43)
 \end{aligned}$$

以上の(41), (42), (43)を求める計算は検算を行い, 誤りのないことを期したが念のために特別の荷重状態にした場合の w を求めてこれが既知の結果に一致することを示しておく。

(i) 作用荷重なき場合

$u=0$ となるので $\sin \frac{m\pi u}{2a} = 0$ となり当然のことながら $w=w'=w''=0$ が成立する。

(ii) 等分布荷重満載の場合

$u=a$, $u=b$, $\xi=a/2$, $\eta=b/2$ ゆえ $\alpha_m=0$, $\beta_m=m\pi b/a$ となる。これらの値を式(42)に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 w' = & \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a} \left\{ 1 - \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi y}{2a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \right. \\
 & + \frac{\cosh \frac{m\pi b}{a} - 1}{\sinh \frac{m\pi b}{a}} \left(1 - \frac{m\pi b}{2a \sinh \frac{m\pi b}{a}} \right) \sinh \frac{m\pi y}{a} \Big\}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{\cosh \frac{m\pi b}{a}-1}{2 \sinh \frac{m\pi b}{a}}-\frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}\} \cdots \cdots \cdots(44)$$

式(44)は図1の座標系におけるたわみ曲面の式である。これを図3の座標系で表現するためには座標変換を行えばよい。(44)で x は不変とし y を $y+b/2$ として簡単化すると式(45)になる。これを例えば文献2の式(139)とくらべると式の表現は見かけ上一致しないが若干の変形で完全に一致する。

$$w'=\frac{4q_0a^4}{\pi^5D}\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty}\frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi x}{a}\left\{1-\frac{1}{\cosh\theta_m}\left(1+\frac{\theta_m}{2}\tanh\theta_m\right)\cosh\frac{m\pi y}{a}\right. \\ \left.+\frac{1}{2\cosh\theta_m}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}\right\}\cdots\cdots\cdots(45)$$

但し、 $\theta_m=\frac{m\pi b}{2a}$ である。

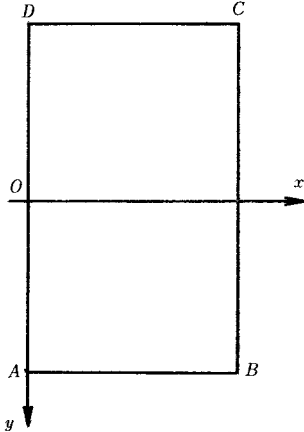


図 3

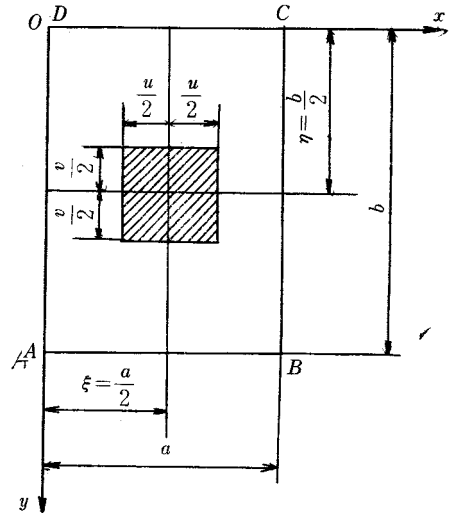


図 4

(iii) 等分布荷重を板の中央部に載荷する場合

この場合の正確な載荷状態は図4に示す。

ここでは検算してみることがいろいろ考えられるがそのうちの主なものを取りあげる。

第一にこの場合にはたわみ曲面の対称性が要求される。図4の板の任意点 (x, y) における式(43)によるたわみ w'' と対称点 $(x, b-y)$ における式(41)によるたわみ w とは相等しいはずである。このことを確かめておく。本例では $\xi=a/2$, $\eta=b/2$ ゆえ $\alpha_m=m\pi(b-y)/2a$, $\beta_m=m\pi(b+y)/2a$ となることに注意して計算する。(41)において変数 y を $b-y$ なる変数にして式を簡単にすると(途中の計算は少々複雑になるが), 結果は式(43)に一致し, たわみ曲面の対称性が保たれていることが分る。

次に x 軸を平行移動として図3のよな座標系にしたときのたわみ曲面 w' を(42)によって求める。これが既知の結果に一致することを示す。 w' は(42)から次の(46)になる。

$$w'=\frac{4q_0a^4}{\pi^5D}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^5}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi u}{2a}\sin\frac{m\pi x}{a} \\ \times\left[1+\left(\frac{\alpha_m}{2}\sinh\alpha_m-\cosh\alpha_m\right)\cosh\frac{m\pi y}{a}\right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \cosh \alpha_m \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} + \left\{ \sinh \beta_m - \frac{\beta_m}{2} \cosh \beta_m \right. \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{m\pi b}{a} \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} - \frac{\alpha_m \sinh \alpha_m + 2 \cosh \beta_m - 2 \cosh \alpha_m - \beta_m \sinh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \\
& \times \sinh \frac{m\pi y}{a} - \frac{1}{2} \left(\sinh \beta_m + \frac{\cosh \alpha_m - \cosh \beta_m}{\tanh \frac{m\pi b}{a}} \right) \frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a} \Bigg\} \dots\dots\dots(46)
\end{aligned}$$

この式において y を $y+b/2$ として変形すると $\sinh \frac{m\pi y}{a}$ と $\frac{m\pi y}{a} \cosh \frac{m\pi y}{a}$ の係数はともに 0 になって次のようになる。

$$\begin{aligned}
w' = & \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi u}{2a} \sin \frac{m\pi x}{a} \\
& \times \left[1 + \left\{ -\frac{\cosh \alpha_m}{\cosh \frac{\alpha_m + \beta_m}{2}} + \frac{\alpha_m - \beta_m}{4} \frac{\sinh \alpha_m}{\cosh \frac{\alpha_m + \beta_m}{2}} \right. \right. \\
& + \left. \frac{\alpha_m + \beta_m}{4} \frac{\sinh \frac{\alpha_m - \beta_m}{2}}{\cosh^2 \frac{\alpha_m + \beta_m}{2}} \right\} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{\cosh \alpha_m}{2 \cosh \frac{\alpha_m + \beta_m}{2}} \frac{m\pi y}{a} \sinh \frac{m\pi y}{a} \Bigg] \dots\dots\dots(47)
\end{aligned}$$

これは文献 2 の(142)に同じである。

§ 3 あ と が き

図 1 の状態にある板のたわみ曲面は(41), (42), (43)の三つの式で表わされることが分った。板の断面に作用している曲げモーメント M_x , M_y , ねじりモーメント M_{xy} , せん断力 Q_x , Q_y はたわみ曲面の式が求まれば容易に求まる。

参 考 文 献

- 1) 成岡・他 3 名：構造力学第 3 巻 (丸善, 1970), 198—211
- 2) S.P. Timoshenko and S.W. Kreiger: Theory of Plates and Shells, (McGraw-Hill, New York, 1959), Chap. 5

(昭和51年11月5日受付)

岩盤斜面におけるロックボルトの効果（模型実験）

（土木工学科） 石 井 義 明

Model Experiment on the Anchor Effect of Rock Bolt of Stratified Rock Slope

Yoshiharu ISHII

In order to investigate the anchor effect of rock bolt of the stratified rock slope, a model test was carried out by using a pile of blocks made of vinyl chloride and steel bar.

As an experimental result the anchor effect of rock bolt locating for parallel to stratified layer was founded to be largest at the middle of slope height. Further in this paper the reason why above results are caused is discussed.

§ 1 ま え が き

岩石の節理，層理あるいはひび割れなどは不規則に発達しているものもあるが，一定方向に発達し成層状態をなす場合も少なくない。このような岩盤地帯を掘さくし，斜面を形成する現場は多く，斜面の移動を防いだり，現在の，あるいは潜在するすべり面に作用する垂直力を増加させ，せん断抵抗力を増加させる方法として，ロックボルトによりプレストレスを岩盤に与える工法が最近多く用いられるようになった。しかしこれを実施することによる効果の判定や，割目方向に対するロックボルトの有効な打込方向等に関する研究は少ないようである。このため不経済な，また強度的に十分効果を発揮し得ない場合がある。

本報告は主成層面が単斜層をなし，この層と直交する方向に割目を有する斜面安定のために，ロックボルトで補強することによる，有効な打込み方向，打込み位置，打込み深さ等を模型実験により調べた結果である。

§ 2 実 験 の 概 要

実験は著者が以前より行っている¹⁾この種の模型実験に用いた木製台の上に塩化ビニール製ブロック（ $2 \times 2 \times 5 \text{ cm}$ ）を斜面状に積層し，台を回転し主成層面に傾斜角を与え崩壊に到らしめる方法をとった。ブロックの積層方法は図1のように格子積み，千鳥積みの二種によった。また図のようにブロックに約 $\phi 2 \text{ mm}$ の穴をあけておき，ここに $\phi 2 \text{ mm}$ の鋼材を通し両端をねじで締付けこれをロックボルトとした。写真1は千鳥状に積層された斜面で，黒く塗りつぶした柱状部がボルトにより成層面と直角方向に締付けられた場合のブロックである。なお前もって調べたブロックの摩擦角 $\phi \doteq 26^\circ$ 単一ブロックの重さは 15 g である。

この他，斜面背後に発生する引張りき裂の発生位置とすべり面を推定するためひずみゲージをブロックに貼りつけ，成層面のなす角の変化にともなうブロック間の移動量についても調べたが，実験方

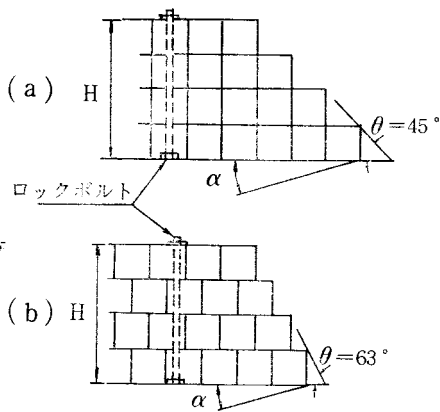


図1 ブロック積層方法とロックボルトの一例

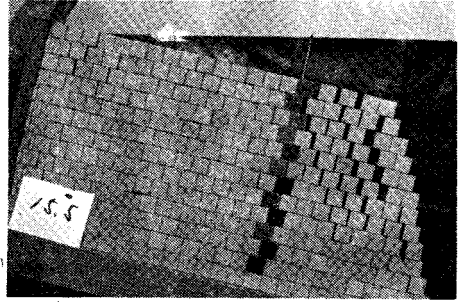


写真1 成層面と垂直方向(千鳥)の場合の崩壊状況

法の詳細は後述する。

§ 3 実験結果と考察

3.1 ロックボルトを使用しない場合

単斜層構造をなす岩盤斜面の安定性をテルツァーギ²⁾は成層面の摩擦角 φ 、粘着力 c ならびに成層面の傾斜角 α の関係で論じ、 $c=0$ の場合 $\alpha < \varphi$ ならば斜面高さ H とは無関係に安定であるとしている。しかし $\alpha > \varphi$ であっても崩壊する例は各地にみられ、著者もすでに実験的に確認している³⁾。例えば斜面前面の傾斜角 θ は一定で H のみを変え、崩壊時成層面のなす角 α_f との関係をみると図2のようである。 H の増加とともに格子・千鳥積みのいずれも α_f は減少し H と相関性のあることを示している。この場合、後述3.3の推定すべり面上における滑動に対する安全率 F_s を概算すると $F_s > 1.2$ となり、また上述 $\alpha < \varphi$ の関係からすれば $\varphi \approx 26^\circ$ であるから、理屈の上では崩壊しないはずであるにかかわらず、小さい α で崩壊している。これは割れ目を有する岩盤斜面の崩壊が成層面に沿うすべりによって生ずるのでなく、斜面の変形、柱状ブロックの転倒など複雑な機構により崩壊するためと思われる。

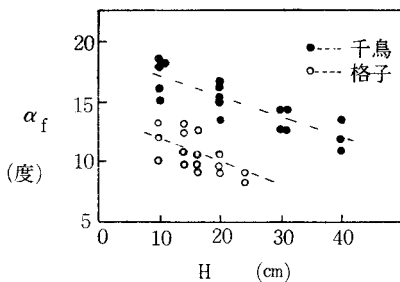


図2 破壊時成層面のなす角と斜面高さの関係

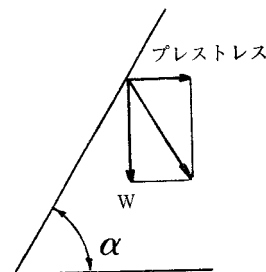


図3 のり面安定に対するP Sの効果

3.2 ロックボルトを使用した場合

3.1 で述べたような斜面安定のためロックボルトを使用した場合、プレストレスによる力学効果の表現は種々あり、一例を示せば図3のようである⁴⁾。すなわち斜面の横方向にプレストレスを与えると、岩盤に作用する合力の向きが山側に β だけ傾き、のり面こう配が β だけ緩くなったのと同じ効果

がある。このことからすれば本実験においては成層面とある傾きをなす方向にロックボルトを打込んだ場合の効果は最も大きい事になる。しかし実際現場においては周辺地形の条件等のため、成層面と垂直な方向に、或いは平行な方向にボルトを打込まねばならない事がある。そこで、ここではボルトを (a)成層面と直交する方向、(b)成層面と平行な方向、(c)成層面とある傾きをなす方向に打込んだ場合について調べた。

3・2・1 成層面と直交方向の場合

図4は高さ $H=24\text{cm}$ の斜面に、斜面高さと等しい長さ 24cm のボルトを成層面と直交する方向に打込んだ場合の、崩壊時成層面のなす角 α_f とボルトの法肩からの位置 x の関係である。ただし比較のため横軸は x を無次元化した x/H を用いた。また x/H は法肩を中心に斜面背後側をマイナス、斜面前面側をプラスとしてプロットした。

図は格子・千鳥積みの両方とも $x/H=0$ で α_f は最大を示し、法肩の所に打込むボルトの効果が最も大きいことを示している。この傾向は格子積みの場合が特に著しい。また格子積みでは $x/H=-0.6$ 以上になると α_f はほぼ一定となる傾向にあるが、千鳥積みの場合は $x/H=-0.8$ でも一定とならず、法肩からかなり離れた位置に打込んででも効果のあることを示している。これは格子積みの場合はボルトの締付け効果が隣のブロックに及ばず、一体化としての効果が少ないのに対し、千鳥積みの場合はブロックの割目位置がずれているためかみ合せのような効果が生じ、図5の矢印で示す範囲

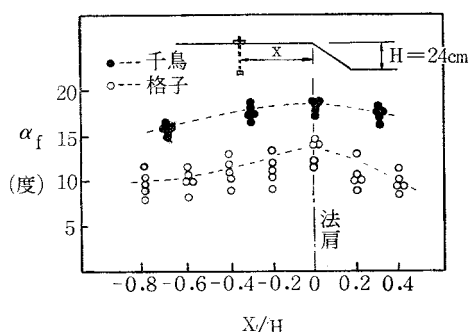


図4 成層面に対し垂直方向のロックボルトと破壊時成層面のなす角の関係

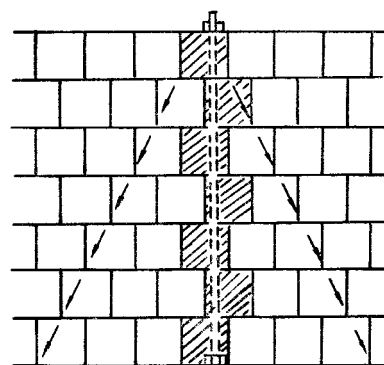


図5 千鳥積みのかみ合い効果に及ぶ範囲

に締付け効果が及び、一体化される領域が大きいためと思われる。この他格子と千鳥積みのデータとを比較すると格子のデータのばらつきが大きい。この事は格子積みのような単純な構造のものはボルト打込み効果が不確実で、崩壊は種々な要因に支配されるのに対し、千鳥積みのような複雑な構造を有する場合はボルトの効果は比較的確実で、崩壊は気まぐれな要因には支配されないと考えられる。

3・2・2 成層面と平行な方向の場合

図6は $H=24\text{cm}$ の斜面の成層面と平行な方向に長さ 24cm のボルトを打込んだ場合の破壊時成層面のなす角 α_f とボルトの位置 y との関係で、無次元化した y/H を横軸にとった。崩壊状況の一例を写真2に示した。

図6は y/H の増大とともに α_f は大きくなり斜面が安定し、ボルトの位置が斜面高さの真中に相当する $y/H=0.6$ で α_f は最大である。千鳥の場合についてのデータは少ないが、格子積みとほぼ同様な傾向にあるものと思われる。これより $H/2$ の位置にボルトを打込むのが最も有効であることがわかる。これは後述3・4・1で述べるように、ボルトの位置が浅いほどボルトの長さを長くしなければならない事からして当然のことと言える。格子積みの $y/H=0.2$ 以下では α_f はほぼ一定で、この値はロ

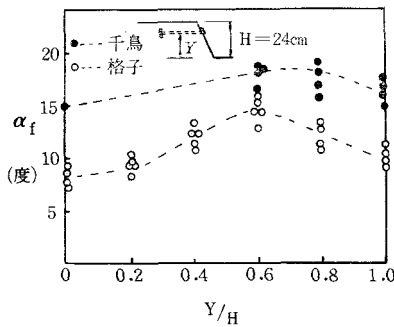


図6 成層面と平行方向のロックボルトと破壊時成層面のなす角の関係

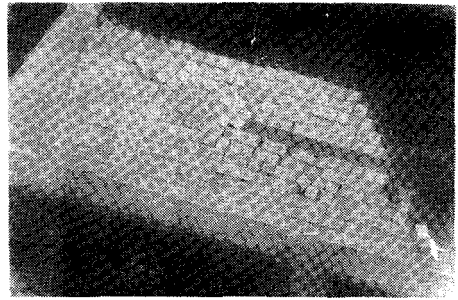


写真2 成層面と平行方向（格子）の場合の崩壊状況

ックボルトを使用しない場合に等しい大きさである。従って格子のような単純な構造の岩盤斜面では $H/2$ より下にロックボルトを打っても効果がない。また最上段に近い $Y/H=0.8, 1.0$ では効果は大きくないが幾分かある。しかし図3を参考にするに、ボルトの位置が最上段に近いほど上載圧 W は小さくなり、プレストレスの大きさは位置に関係なく一定とすれば、合力の方向は山側に傾き安定な斜面となるはずであるが、図6では $H/2$ に相当する場合が最も安定な事を示している。これは最上段近くにボルトがあると、アンカーとして抵抗する領域と、斜面背後に生ずる引張りき裂等の破壊領域が重なり、アンカーとしての役割を十分に果たせず、プレストレスの効果も減少する。これに対し $H/2$ の高さにあるブロックに施したボルトは引張り等によるき裂、すべり面等の発生場所より離れた所でアンカーされるため、同一長さのロックボルトを使用する場合は $H/2$ あたりに施すのが安定効果が大きい。

3・2・3 成層面と傾きを有する場合

ロックボルトが切る割目の数が多いほど安定性に及ぼす効果が大きいと思われるので、図7のように成層面と角 γ をなす方向にブロックを締付け実験も行った。しかしこの方向の締付けはブロックに穴をあける事がむづかしいため、ボルトは接着剤で前もってブロックに接着しておき、斜面状に積層する方法をとった。ただしボルトの代用に薄い鋼版を使用した。図における x はロックボルト頭部と法肩との距離を示し、ボルトの成層面とのなす角 γ は格子積みで 45° 、千鳥積みでは 63° である。

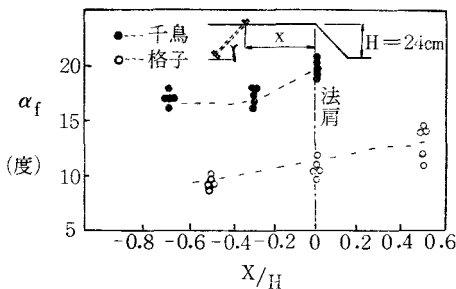


図7 成層面と傾きを有するロックボルトと破壊時成層面のなす角の関係

この結果は格子・千鳥積みともにボルトが法肩に近い位置にあるほど α_f は大きく斜面が安定になることを示している。時間の都合で千鳥積みの $x/H=0$ より前については調べられなかったが、格子積みの結果によれば $x/H=0$ の α_f より大きく安定な結果を示している。これは崩

壊状況の観察からすると図8のように考えられる。すなわちボルトを対角線とする四角形状の部分が図(a)の斜線で示されるような一つの壁となり一体化され締付け効果の及ぶ範囲が他の打込み方法にくらべ広くなる。しかし斜線より右の斜面前面側はこの効果が及ばず、むしろ斜線部締付けにより斜線部に接する近辺に緩みが生じ、ボルトを施さない場合と同様に崩壊しやすいと思われる。ところが(b)図のように打込むと、締付け効果の及ぶ範囲は狭いが、最も崩壊しやすい部分のブロックが一体化され安定となり $x/H=0.6$ において α_f が最大を示したと思われる。一方 $x/H=-0.5$ 以下では α_f は一定

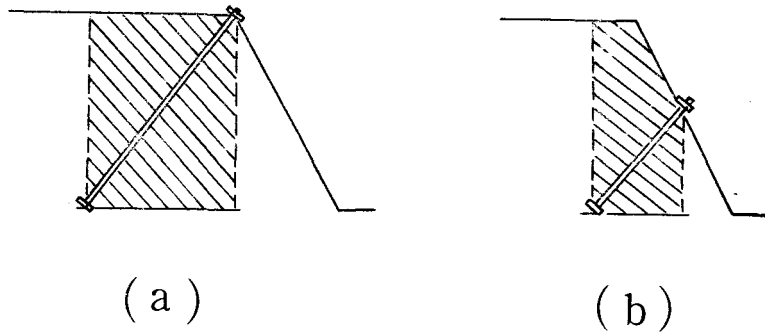


図8 成層面と傾きを有するロックボルトの締付け影響範囲

となりボルトの効果はなくなることを示している。千鳥積みの崩壊状況を示す一例は写真3である。図8(a)のような状況を示している。

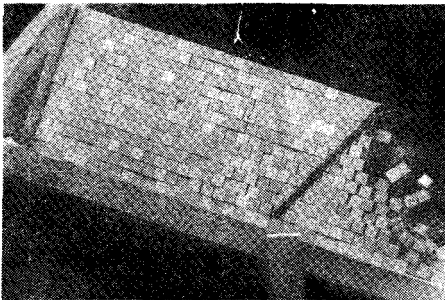


写真3 成層面と傾きをなす場合各（千鳥）の崩壊状況

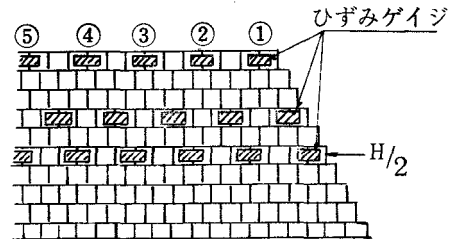


図9 ひずみゲージ設置位置

3.3 ひずみゲージによるすべり面の推定

土質力学における斜面の安定はすべり面に分布した全滑動力とこれに対応する全抵抗力の比で論じられるが、岩盤斜面は岩盤が成層面や、ひび割れを有するため、局所的な破壊や、特定面に沿った破壊を生じやすく、理論の確立はむづかしくすべり面の発生位置の推定はむづかしい。しかしロックボルトを有効に働かせるためには、すべり面の発生位置を確かめアンカーとしての抵抗可能な領域を見出す事が大切である。そこで問題はあろうが図9のようにブロックにひずみゲージを貼り、成層面の傾斜角 α の変化に伴うひずみ、すなわち各ブロックの緩みに伴う移動量を測定することにより、崩壊時に発生するすべり面の推定を試みた。用いたひずみゲージはKFC-5-CI、ゲージファクタ $2.11 \pm 1\%$ である。ただしこの実験ではボルトは使用していない。

ひずみゲージを図のように同時に全面に貼ると、不連続体としての変形、移動を拘束する恐れがあるので、図のように2個のブロックのジョイントに第1回目は最上段にのみ貼り、 $\alpha=1\sim6^\circ$ までそれぞれの傾斜角におけるひずみの測定を行った。そして第2回目は上から約 $H/3$ に相当する段のブロックに、第1回目同様に貼り、第3回目は $H/2$ に相当する段の、第4回目は最下段のブロックにゲージを貼り測定した。 $\alpha=5^\circ$ における測定値から、圧縮・引張りひずみの大きさを矢印で示すと図10である。例えば最上段の場合、法肩に最も近い①のゲージは引張り状態を示し、②は圧縮、引張りともに生じておらず、③は圧縮を、④は最大の引張りひずみの生じていることを示している。 $H/2$ の段の場合は全部引張り状態にある事を示し、特に右から3番目のゲージの値が最大、2番目が最小の引張り状態を示している。同様に最下段についてみれば、全部圧縮側の値を示し、右から4番目が最大値を示している。

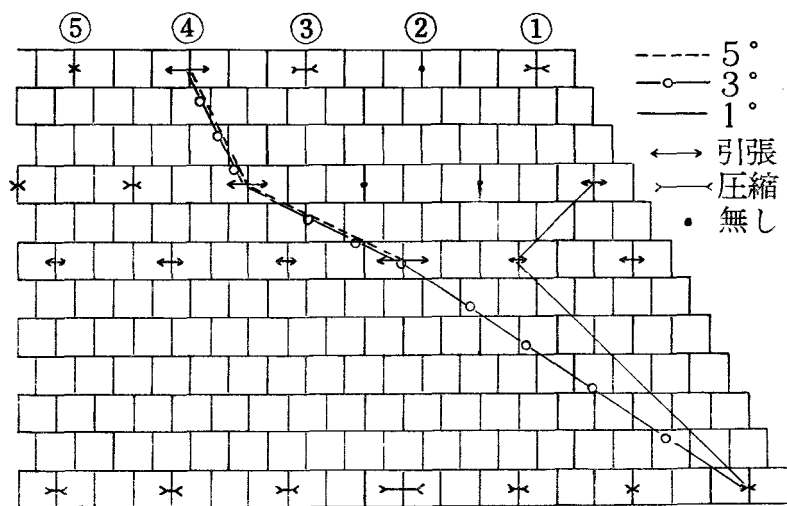


図10 ひずみ量 (5°) と推定すべり面

次に成層面が $\alpha=1^\circ\sim6^\circ$ までの各々の角度における引張りひずみ最大を示した位置を結ぶと図中に示す破線等になるのである、これが最終的にはすべり面に発達すると思われる。 $\alpha=1^\circ$ における各段の最大ひずみ点を結ぶと、図示するように斜面前面寄りにすべり面が発生することになる。しかし $3^\circ\sim5^\circ$ におけるすべり面は、同じ位置にあり重なることから、 α がある程度以上に大きくなると、すべり面の発生位置はあまり変化がなく、同じような位置に発成するようである。著者が以前に行った実験⁵⁾でもだいたい同じような位置に崩壊時すべり面が生じ、今回の結果とはほぼ一致している。その他、図の矢印の方向に注目すると、斜面前面と、推定されるすべり面とに囲まれた崩壊領域のブロックは中段あたりは引張りを示すものが多いので、このあたりの緩みが大きく崩壊を生じやすいと言える。この事は図6、図7で述べた α_f 最大を示す理由と関連があるようである。また土の場合は、斜面先は応力集中が起こり、土かぶり圧も小さいため、せん断抵抗もあまり大きくなりず破壊の危険が大きいと言われる⁶⁾。しかし図10や実験の観察等からすると、割目を有する岩盤斜面では斜面先破壊は生ぜず、斜面内破壊が多く発生すると言える。

3.4 ロックボルトの長さの影響

斜面前面と、すべり面とに囲まれた崩壊領域内に位置する長さのボルトを打込んだ場合と、この領域を越えて安定な領域に達す長さのボルトを打込んだ場合とでは、アンカーとしての効果は当然後者が大である。この効果の相違の度合を知るため、 $0.33H$ 、 $0.83H$ 、 $1.3H$ の長さのボルトを成層面と平行に打込む実験も行った。

図11は $H=24\text{cm}$ の千鳥積み斜面に、ボルトを $H/2$ の位置に成層面と平行に打込んだ結果で、図中には斜面背後に発生したすべり面の位置も示した。図の横軸 $0.33H$ は図10の $H/2$ の右から4個目のブロックまでを締付けた場合に相当し、 $0.83H$ は16個目のものに相当する。 $0.33H$ では崩壊領域内でアンカーさせていることになり α_f は小さく、 $1.33H$ では十分安定な領域でアンカーしたことになり α_f は大きくなっている。この他ボルトの打込み位置を最上段や、 $H/3$ の高さのブロックについて行った場合も同様な傾向にあったが図は省略する。

3.5 アンカーの必要長さの一考察

図12は成層面が α をなす斜面のすべり面に囲まれた岩塊の重量を W 、これを崩壊させようとする力

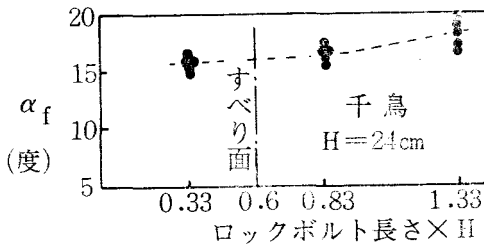


図11 ロックボルトの長さの効果

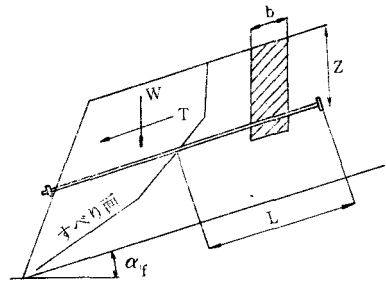


図12 崩壊とアンカー領域の模式図

の成分を T とし、 Z の深さにあるボルトのうち、 L の長さがアンカーとして抵抗することを表わしている。そしてアンカーとしての抵抗力はブロックが不連続なため、 Z の深さにあるブロック底面における上載圧にもとづく摩擦抵抗力により発揮されるものとする。図の斜線部の面積は単位幅の b について考えれば $Z \cos \alpha_f$ 、岩盤の単位体積重量を γ とすると上載圧は $\gamma Z \mu \sin \alpha_f$ 、但し μ は岩塊の摩擦係数。 L 、 T の間には $L = \frac{T}{\gamma Z \mu \cos \alpha_f + F}$ が成り立つ。 F はすべり面に囲まれた領域の、ボルトの締付けにより増加する抵抗力であるが、以下の計算では無視する。

$T = W \sin \alpha_f$ であり、図10のようなすべり面が生ずると仮定すると、本実験における $W = 462g$ 、平均崩壊時成層面のなす角を $\alpha_f = 16^\circ$ 、 $\gamma = 1.5g/cm^3$ 、安全率 $F_s = 1$ とし、上式にこれらの値を代入し $Z = \frac{H}{2} = 12cm$ における L を求めると $L = 7.2cm$ となる。これは $0.3H$ の長さのアンカー部が必要な事になる。同様にボルトが最上段にある場合についても計算すると、 $L = 44cm$ 、これは $1.88H$ に相当する L である。しかしここでは F を無視したが実際にはこれも安定に寄与するので、使用する L はもっと小さくてよい。また上式からすれば、 Z が大なるほど同一長さのボルトならば L は大きくなる。従って安定になるはずであるが、図6では $\gamma/H = 0.6$ 以下では α_f は減少し実験値は上式と一致していない。これは Z が大きくなると、締付けの影響する範囲が少なくなるためである。このため上式の適用は $Z = H/2$ より小さい場合に限られる。

§ 4 ま と め

今回の実験で得られた結果を要約すると次のようである。

- (1) ロックボルト打込み効果は格子積みより千鳥積みのような規則的ではあるが、複雑な構造を有する場合は、かみあい効果のため、より効果的である。
- (2) 成層面と直交する方向に打込む場合、法肩部に近いほど効果が大きく、法肩から $0.6H$ 以上離れると効果はほとんどない。
- (3) 成層面と平行に打込む場合、 $H/2$ に相当する高さに打込むのが最も効果が大きい。
- (4) 成層面と傾きを有する方向に打込む場合、斜面前面の $H/2$ あたりより打込むのが効果が大きい。
- (5) ひずみゲージによりブロックの移動量を測定すると、斜面背後に生ずる引張りき裂の位置は法背より $0.8H$ あたりであることが推定された。
- (6) 同一長さのロックボルトを成層面と平行に打込む場合、 $H/2$ の位置が有効である。
- (7) アンカーとして必要な長さは、ボルトの位置が $H/2$ の場合、発生するすべり面より $0.3H$ の長さである。

今回の実験は斜面高さを $24cm$ と一定にしたものであるが、今後、更にこれを変化させたり、ブロックの大きさを変える、ボルトの長さを変える、アンカー部の引張り、圧縮ひずみを測定し、ロックボ

ルトの抵抗の機構を，より詳しく研究して行くつもりである。

最後に研究を進めるにあたり，有益な示唆を賜った京都大学名誉教授村山朔郎博士に深謝の意を表します。また実験は呉高専土木工学科5年（現在広島電鉄）榊田浩文君に負う所大で，感謝の意を表します。なお，土木学会中国四国支部昭和50年6月の講演会にて一部発表済み。

参 考 文 献

- 1) 石井義明：呉高専研究報告，10巻2号（1975），57
- 2) Terzaghi K. : Geotechnique, 12 (1962), 251
- 3) 村山朔郎・石井義明：京大防災年報，11号B（1968）503
- 4) 土木学会編：土木技術者のための岩盤力学（1966），247
- 5) 前掲 1), 3)
- 6) 山口柏：土質力学，技報堂，（1972）307

（昭和51年11月1日受付）

コンクリート杭の動的支持力について

(土木工学科) 久 良 喜 代 彦

The Dynamic Bearing Capacity of A Concrete Pile

Kiyohiko KURO

Parameters involved in the Smith's method of pile driving analysis were investigated to predict the ultimate bearing capacity of a concrete pile.

Then, the adaptabilities of 7 dynamic pile driving formulas were examined by comparing the results calculated by the formulas with those by the Smith's method and with those obtained from field test data.

§ 1 ま え が き

打込み杭の支持力推定に杭打ち公式を用いることには従来より批判のあるところである。その主なものは次のようなものである。

i ごく短い時間しか作用しない打撃力を長期にわたって作用する静的荷重と等しいとすることには疑問がある。

ii 打撃エネルギーの損失の評価が困難である。

吉成¹⁾ は今日までに提案されている杭打ち公式の数が余りにも多過ぎること、そしてそれらの大半が杭打ち公式として不適格であること、杭打ち公式の適用性に関する研究が不十分であること等が杭打ち公式の信頼性を失なわせる大きな原因になっているが、杭打ち公式は杭打ち試験という実物試験の結果を用いるものであり、式の内容に実際に即応した理論的妥当性が備わるかぎり、かなりの信頼性が存在し得るはずであるとしている。

Smith の提案した波動理論による杭打ち解析法²⁾はその用途としては打撃応力の推定に限定すべきであるという意見があるが、Smith の本来の意図は杭の動的支持力推定にある。

この解法の中で用いられている諸定数、諸仮定には検討の余地があるが、この解法はその幅広い適用性のために従来の杭打ち公式について検討する場合のよりどころとなり得るものと思われる。

本研究の主な目的はコンクリート杭の動的支持力推定に関して、

i 波動理論による解法に用いられている諸仮定、諸定数について検討する。

ii 従来の杭打ち公式の適用性について調査する。

ことにある。なお本研究は、良質の支持層に充分打込まれた杭の打止め時近傍の支持力推定に限定することにする。

§ 2 波動理論による解法

(1) 記 号

この解法で用いる記号は次の通りである。

A_m : 断面積 (cm^2)

$C_m(t)$: ばねの圧縮量 (cm)

$D_m(t)$: 変位量 (cm)

$D'_m(t)$: 土の塑性変位量 (cm)

e_1, e_2 : キャップブロックおよびクッションの反撥係数

e : 打撃効率

$F_m(t)$: ばねに作用する力 (kg)

g : 重力の加速度 (cm/sec^2)

J_m : 減衰定数 (sec/cm)

K_m : ばね定数 (kg/cm)

K'_m : 土のばね定数 (kg/cm)

m : 系列の各部分を表わす一般の添字

s : 杭の貫入量 (cm)

t : 各時間間隔に付した番号

p : 杭先端部を表わす添字

Q : 土の最大弾性変位量 (cm)

$R_m(t)$: 地盤の抵抗 (kg)

R_{um} : 地盤の極限抵抗 (kg)

ΔT : 時間間隔の長さ (sec)

$V_m(t)$: 速度 (cm/sec)

W_m : 重量 (kg)

$C_m(t), D_m(t), \dots$ の () は時間の関数であることを示す。

(2) 解法の概要

a) 基本方程式 弾性体を伝ばする応力波の挙動は次の弾性方程式で表わされる。

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \right) = -R \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし, W : 重量, D : 変位量, R : 外部抵抗, K : ばね定数

式(1)は階差法によって次の(2)~(5)の方程式群に分解される。

$$D_m(t) = D_m(t-1) + V_m(t-1) \cdot \Delta T \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$C_m(t) = D_m(t) - D_{m+1}(t) \quad \dots\dots\dots (3)$$

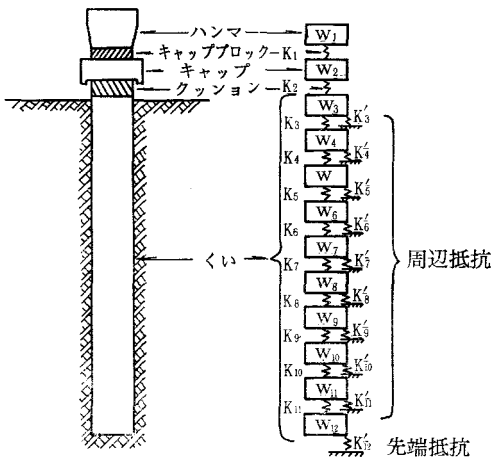
$$F_m(t) = C_m(t) \cdot K_m \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$V_m(t) = V_m(t-1) + \{F_{m-1}(t) - F_m(t) - R_m(t)\} \cdot \Delta T \cdot g / W_m \quad \dots\dots\dots (5)$$

ハンマー, クッション, 杭, 地盤の系列を図1に示すように重量をばねで連ねた形に表現し, 一方, 衝撃の作用した時間を短い時間間隔 ΔT に分割する。

初期条件として衝撃速度 $V_1(0)$ を与え, 地盤の極限抵抗 R_{um} を適当に仮定し, 系列各部分 m ごとに上記の基本方程式(2)~(5)を上から順に解いて行く, これらの演算を各時間間隔ごとに反覆繰り返すことにより系列各部の変位量 $D_m(t)$, 力 $F_m(t)$, 速度 $V_m(t)$ を求めることが出来る。

b) 付加条件 クッション, 杭コンクリート, 地盤などの非弾性的性質については上記の基本方程式に次に述べるような補正を加える。



(A) 実際のくい (B) 理想化されたくい

図1 計算目的の計算目的のために理想化されたくい

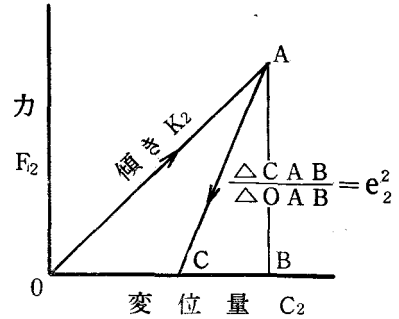


図2 クッションの力-変位図

i クッションについて クッションの力-変位関係を図2のように仮定し、クッションを表わすばね K_2 に生ずる力 F_2 を(4)式で $m=2$ の場合について次のように表わす。

$t=0$ のとき $C_{2max}=0$ として、

$$C_2(t) \geq C_{2max} \quad \text{ならば} \quad F_2(t) = K_2 \cdot C_2(t)$$

$$C_{2max} = C_2(t)$$

$C_2(t) < C_{2max}$ ならば

$$F_2(t) = K_2(C_2(t) - C_{2max})/e_2^2 + K_2 \cdot C_{2max}$$

ただし、 $F_2(t) < 0$ のとき $F_2(t) = 0$

.....(6)

キャップブロックについても上と同様にする。つまり式(6)で添字2を1で置き換えれば良い。

ii 杭コンクリートについて 杭コンクリートの内部摩擦を考慮に入れて(4)式で $m=3, 4, \dots, p-1$ の場合について内部摩擦係数 $B(\text{sec})$ を用いて次のように表わす。

$$F_m(t) = K_m \cdot C_m(t) + B \cdot K_m \{C_m(t) - C_m(t-1)\} / \Delta T \quad \text{.....(7)}$$

iii 地盤について 地盤の静的抵抗と変位との関係を図3のように仮定する。ここで、地盤の弾性を表わすばね定数を K'_m とすると、 $K'_m = R_{um}/Q$ である。

図4に示すように、 m 部分の杭変位量を $D_m(t)$ 、その箇所の地盤の塑性変位量を $D'_m(t)$ とすると、地盤の静的抵抗 $R_{ms}(t)$ は次の式で表わされる。

$$R_{ms}(t) = K'_m \{D_m(t) - D'_m(t)\} \quad \text{.....(8)}$$

ただし、 $|D_m(t) - D'_m(t)| \leq Q$

衝撃時の地盤抵抗 $R_m(t)$ は静的抵抗 $R_{ms}(t)$ に速度 $V_m(t)$ に比例する粘性減衰抵抗 $J \cdot V_m(t) \cdot R_{ms}(t)$ を加算して次のように表わされる。

$$\begin{aligned} R_m(t) &= R_{ms}(t) \cdot \{1 + J_m \cdot V_m(t)\} \\ &= K'_m \cdot \{D_m(t) - D'_m(t)\} \cdot \{1 + J_m \cdot V_m(t)\} \quad \text{.....(9)} \end{aligned}$$

iv その他の補正 ディーゼル・ハンマーの爆発力について考慮する場合については後述する。

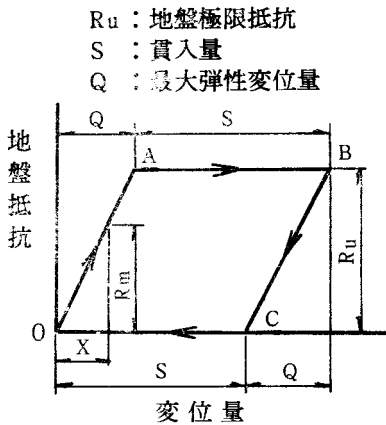


図3 地盤抵抗-変位図

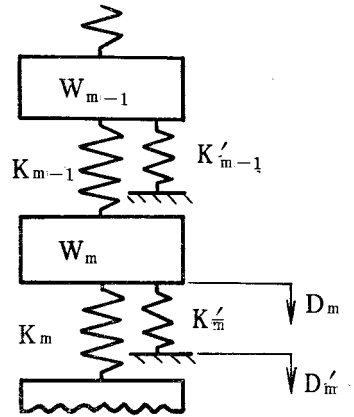


図4 土の弾性

(3) 打撃エネルギー

打撃エネルギーおよびその損失の評価は支持力推定上、重要なことである。本節ではこれに関連する事項について検討する。

a) 打撃効率 ディーゼル・ハンマーではラムはシリンダー内の空気を圧縮しながら落下してピストンに衝突する。このためにハンマーの衝撃速度 V_1 は自由落下の場合の速度より小さくなる。Hirsch 等³⁾ は V_1 は排気孔通過時の速度に等しいとしている。つまり、

$$V_1 = \sqrt{2g(h-d)} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h \cdot e}, \quad e = (h-d)/h$$

ここに、 h : ハンマー落高、 d : 排気孔とピストン上面との距離

Delmag D12, D22ディーゼル・ハンマーでは e は0.8程度である。この点から打撃効率は $e=0.8$ として良いものと思われる。

b) 打撃エネルギー ディーゼル・ハンマーの打撃エネルギー E_0 はラム落下による運動エネルギー E_k とディーゼルの有効爆発エネルギー E_e の和で表わされる。Hirsch 等は運動エネルギーは $E_k = W_h \cdot (h-d)$ としている。

ここに W_h : ハンマー重量

E_e については明確な資料はないが、Smith 解法による計算から、全爆発エネルギーの中で、杭に対して有効な仕事をなす部分は小さく、 $W_h \cdot d$ と同じ order の値と見做せるところから、 $E_e = W_h \cdot d$ と仮定し、

$$E_0 = E_k + E_e = W_h \cdot (h-d) + W_h \cdot d = W_h \cdot h \text{ としている。}$$

c) 爆発力 ディーゼル・ハンマーではラムとピストンとの衝突直後、圧縮された空気に燃料が噴射されて爆発が生ずる。これによる圧力は最大で $50 \sim 80 \text{ kg/cm}^2$ まで上昇し、この圧力によって杭に伝わる応力波の主要部は約 4 ms 程度持続する。この爆発力を表わすため、力 F_1 の時間的変化を図5のように仮定する。図の中で $G1$ は爆発力の最大値を表わす。ハンマー重量 2.2 t のディーゼル・ハンマーについて爆発力を考慮して計算した場合と考慮しないで計算した場合を比較すると表1のようになる。これを見ると、貫入量に対する爆発力の影響は地盤抵抗 R_u が大きくなるにつれて小さくなり、打止め時には事実上無視出来る程度になっている。

d) クッション クッションのばね定数は $K_2 = A_c \cdot E_c / l_c = A_c \cdot S_c$ で与えられる。ここに A_c ,

表1 爆発力の影響

地盤抵抗 $R_u(t)$	くい頭応力 $\sigma_h(kg/cm^2)$	貫入量 $S(cm)$	
		$G_1=76t$	$G_1=0$
50	288	4.43	2.44
100	291	1.29	1.28
150	294	0.65	0.65
200	298	0.25	0.25

$$W_h=2.2t, h=200cm, S_c=125kg/cm^2,$$

$$A_p=582cm^2, l_p=25m$$

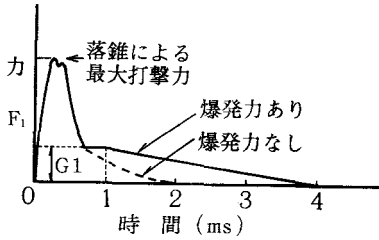


図5 ディーゼルハンマーによる力-時間曲線

E_c , l_c , S_c はそれぞれクッションの断面積, 弾性係数, 厚さ, スチフネス係数である。スチフネス係数 S_c とくい頭応力 σ_h および貫入量 s との関係を求めると表2のようになる。これを見るとスチフネス係数 S_c のくい頭応力におよぼす影響は大きい, 貫入量 s におよぼす影響は地盤抵抗の大きいところでは左程大きくはない。

表2 クッションのスチフネス係数の影響

スチフネス係数 $S_c(kg/cm^2/cm)$	くい頭応力 $\sigma_h(kg/cm^2)$	$Enthru/E_0$	貫入量 $S(cm)$
125	294	0.50	0.65
250	348	0.56	0.74
500	388	0.61	0.76

$$W_h=200kg, h=200cm, A_p=582cm^2$$

$$l_p=25m, R_u=150t, R_{up}=\frac{1}{2} \cdot R_u$$

表3 クッションの反撥係数の影響

反撥係数 e_2	くい頭応力 $\sigma_h(kg/cm^2)$	$Enthru/E_0$	貫入量 $S(cm)$
0.2	294	0.44	0.56
0.4	294	0.48	0.62
0.6	294	0.52	0.69
0.8	294	0.56	0.77

$$W_h=200kg, h=200cm, S_c=125kg/cm^2/cm,$$

$$A_p=582cm^2, l_p=25m, R_u=150t, R_{up}=\frac{1}{2} \cdot R_u$$

次にクッションの反撥係数 e_2 の影響をしらべると表3のようになる。これを見ると, クッションの反撥係数はくい頭応力の影響をおよぼさないが, 貫入量におよぼす影響はスチフネス係数 S_c よりもむしろ大きい。

各方面の杭打ち計測例から得られたくい頭応力実測波形から打撃効率を $e=0.8$ として, キャップブロック+クッションの見かけのスチフネス係数を逆算すると $100 \sim 220kg/cm^2$ 程度であった⁴⁾。これは実際のスチフネス係数をかなり下まわるものと考えられる。これは応力波がキャップブロック, キャップ, クッション, 杭相互の間の不連続面を通過する際のエネルギー損失によるものと思われる。クッションの反撥係数は松(横目)で0.3程度, かし(横目)で0.5程度である。

(4) 地盤抵抗

a) 抵抗配分 この解法ではあらかじめ杭各部に作用する地盤極限抵抗の配分を仮定する。しかし, この解法で得られる打撃抵抗は杭打込み直後の支持力を与えるものであり, 砂質地盤の場合にはこれがほぼそのまま載荷時の支持力となるが粘土質地盤の場合には, これに地盤の性質に応じて適当に割増したものが載荷時の支持力となる。

全抵抗 R_u の中で先端抵抗 R_{up} の割合を増加させて貫入量 s を求めると表4のようになる。これを見ると先端抵抗 R_{up} の割合が大きい場合ほど貫入量 s は小さくなっている。

Smith は彼の示した例題では周辺抵抗 R_{us} を無視して $R_u=R_{up}$ としており, 彼はこうして得られる支持力は安全側になるとしている。この場合, 杭先端応力 σ_p とくい頭応力 σ_h の比, つまり応力伝達

表4 抵抗配分と貫入量, 応力伝達率との関係 (全抵抗 $R_u=150t$)

周辺抵抗 $R_{us}(t)$	先端抵抗 $R_{up}(t)$	くい頭応力 $\sigma_h(kg/cm^2)$	応力伝達率 α	貫入量 $S(cm)$
150.0	0.	304.0	0.16	0.97
112.5	37.5	299.0	0.42	0.76
75.0	75.0	294.0	0.76	0.65
37.5	112.5	291.0	1.02	0.61
0.0	150.0	285.0	1.49	0.56

$W_1=2\ 200kg, h=200cm, S_c=125kg/cm^2/cm, A_p=582cm^2, l_p=25m$

率 $\alpha=\sigma_p/\sigma_h$ が1より著しく大きくなり実情に合わない。

通常, 杭が軟弱層の中に打込まれる場合には応力伝達率は小さいが, 杭先端が支持層に到達すると応力伝達率は急昇する。しかし打止め時でも応力伝達率は0.5~1.0の範囲にあり, 平均して0.7程度である。表4で $R_{up}/R_u=0.5$, つまり $R_{us}=R_{up}$ とすると, 応力伝達率 $\alpha=0.76$ となる。計算に用いる抵抗配分としては $R_{up}=0.5 \times R_u$ として良いものと思われる。

応力伝達率に関係があるのは主として地盤抵抗ならびに杭の内部摩擦である。

周辺抵抗については余りよくわかっていないが, 計算上では表4に見るように周辺抵抗を増加させると, 応力伝達率は減少する。

Ripperger⁵⁾ が鋼棒を用いて行った室内実験はこれら裏づけている。又, 次の項で述べる筑波研究学園都市で行われたくい施工実験でも周辺抵抗が大きい場合には応力伝達率が小さくなっている。

先端抵抗が小さくても応力伝達率は小さくなるが, これは杭先端地盤が軟弱な場合, 杭先端は自由端に近い状態となり, 圧縮応力波は引張波として反射される。このために杭先端近傍では下降圧縮波と引張波が重なりあって見かけ上著しく減衰した量が観測されるからである。

杭コンクリートの内部摩擦は引張応力の推定上は考慮する必要があるが⁶⁾, 応力伝達率そのものにはほとんど影響をおよぼさない。本研究では内部摩擦係数を $B=0.0001sec$ とする。

b) 施工法別支持力調査⁷⁾ 直径50cm, 長さ15mのPC杭を次の3施工法で図6に示す実験地盤に打込んだ場合の打撃応力の分布を比較すると図6のようになる。

1. 打撃工法(A杭)

2. プレボーリングおよび打撃の併用法

(C杭)

3. 中堀および打撃の併用法(E₁杭)

ただし, 2, 3では打撃は支持層に到達後に行う。

各々の場合の実測貫入量 s , 実測応力伝達率 α をもたらす打撃抵抗 R_u を求めて载荷試験による支持力と比較すると表5のようになる。これを見るとA杭とC, E₁杭の間には応力伝達率に差があるがこれはA杭ではC, E₁杭よりも周辺抵抗が大きいためと考えられる。

c) ヤットコ ヤットコ使用の場合には貫入量が減少し, 結果的に支持力を過大に評価することになる。

この原因はヤットコと杭との接触不良によ

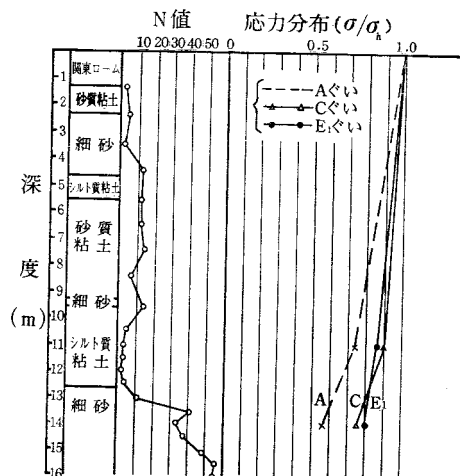


図6 実験地盤のN値ならびに施工法別の応力分布例

表5 施工法別の支持力, 貫入量, 伝達率

施 工 法	杭の名称	載荷試験	打 撃	試 験	波 動 理 論 解		
		支持力* $R_u(\text{ton})$	貫入量 $S(\text{cm})$	伝達率 α	支持力* $R_u(\text{ton})$	貫入量 $S(\text{cm})$	伝達率 α
打 撃	A	440~500 (321~328)	0.22	0.57	430 (270)	0.20	0.56
プレボーリング+打撃	C	300~320 (92~106)	0.98	0.78	280 (120)	0.86	0.81
中 掘 + 打 撃	E ₁	300~320 (49~60)	0.64	0.82	320 (140)	0.63	0.82

* () 内は周辺抵抗

り, 杭に伝達されるエネルギーが減少するためと思われる⁸⁾。ヤットコを使用してもエネルギー損失があるとは限らないようであるが, 損失が認められた資料によると支持力を適正に評価するためには, 打撃効率 e を 8 割程度減少させる必要があるように思われる。

d) 地盤の最大弾性変位量および減衰定数 Smith は A. Hilley, R.D. Chellis 等の調査, 提案にもとづいて地盤の最大弾性変位量を $Q=0.25\text{cm}$ とすることを推奨している。Forehand, Reese 等⁹⁾はSmith の提案は一応妥当なものとしている。Coyle 等¹⁰⁾は模型杭による野外実験を行い, $Q=0.05\sim0.2\text{cm}$ の結果を得たが寸法効果を考慮に入れると Smith の提案は受け入れられるであろうと述べている。 Q の値の貫入量におよぼす影響は表 6 のようになる。これを見ると Q が大きくなると, 貫入量は減少していて, Q の値を大きくする方が支持力として安全側になるが本研究では計算にあたっては $Q=0.25\text{cm}$ を用いることにする。Smith は杭先端地盤の減衰定数 J_p については $J_p=0.005\text{sec/cm}$ とすることを推奨している。この提案は土の急速載荷による圧縮強度は静的圧縮強度を上まわるという実験結果に基づくもので一応妥当なものと考えられている。

表6 地盤最大弾性変位量 Q の影響

地盤抵抗 $R_u(t)$	地盤最大弾性変位量 $Q(\text{cm})$	貫入量 $S(\text{cm})$
100	0.25	1.28
	0.50	1.16
	1.00	0.87
150	0.25	0.65
	0.50	0.57
	1.00	0.34

表7 杭先端地盤減衰定数の影響

 $(Q=0.25\text{cm}, J_s=0.000167\text{sec/cm})$

地盤抵抗 $R_u(\text{ton})$	先端地盤減衰定数 $J_p(\text{sec/cm})$	貫入量 $S(\text{cm})$
100	0.005	1.28
	0.010	0.97
	0.020	0.63
150	0.005	0.65
	0.010	0.45
	0.020	0.25

$$W_h=2\ 200\text{kg}, h=200\text{cm}, S_c=125\text{kg/cm}^2/\text{cm},$$

$$A_p=582\text{cm}^2, l_p=25\text{m}$$

Smith は周辺抵抗の杭の貫入におよぼす効果はあまり大きくないという立場から杭周辺地盤の減衰定数 J_s を $J_s=1/3 \cdot J_p=0.00167\text{sec/cm}$ としている。Coyle 等は模型杭を用いた野外実験結果から, (9)式のかわりに $R_{mq}=R_{ms}(1+J_s \cdot V_m^N)$ とすると, 砂質地盤では $J_s=0$, 粘土質地盤では $J_s=0.3807$, $N=0.35$ となるとしている。 J_p, J_s の貫入量におよぼす影響を求めると表 7 および図 7 のようになる。これを見ると J_p, J_s が大きくなると貫入量 s は小さくなっている。Coyle 等は粘土質地盤について彼等の提案した定数を用いて支持力を求め, これにセットアップ係数 (例えば 2) をかけて妥当な結果が得られたとしているが彼等の J_s, N を用いると, 引張応力が過大にあらわれる欠

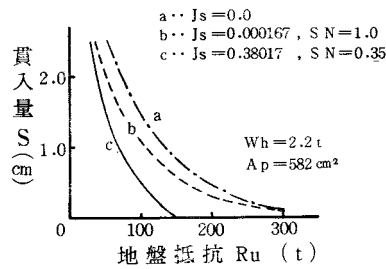


図7 杭周辺地盤減衰定数の影響

点がある。本研究では $J_p=0.005 \text{ sec/cm}$, $J_s=0.00167 \text{ sec/cm}$ を用いることにする。

§ 3 杭打ち公式の検討

(1) 杭打ち公式

一般に杭打ち公式はハンマーの打撃によって杭に与えられる有効エネルギーと杭が貫入する場合に
なす仕事量とが等しいとして得られ、次式の形をとる。

$$\alpha \cdot E_0 = R_d \cdot s + A \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 α : 有効係数, R_d : 動的支持力 (kg), A : 有効エネルギーの中で杭の貫入以外に費されたエネルギーの総和

普通は上述の A は $A = c \cdot R_d$ の形をとる。この c が R_d を含まない時、(10) 式は次のように変形される。

$$R_d = \frac{\alpha \cdot E_0}{s + c} \quad \dots\dots\dots (12)$$

杭打ち公式の大部分は上記の c , α を実用的にどのように扱うかによっていろいろの形に誘導されたものである。

本研究では数多くある杭打ち公式の中から次の7つの公式(13)~(19)について検討する。ここでは使用ハンマーはいずれもディーゼル・ハンマーとし、許容支持力 R_a として与えられているものの3倍のものを極限支持力 R_d として示すことにする。

旧市街地建築物法式¹¹⁾

$$R_d = 3 \times \frac{2 \cdot W_h \cdot h}{58 + 10} = \frac{1 \cdot 2 \cdot W_h \cdot h}{s + 2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

鋼ぐい式¹¹⁾

$$R_d = \frac{e_f \cdot 2 \cdot W_h \cdot h}{s + 1/2 \cdot k} = \frac{W_h \cdot h}{s + 1/2 \cdot k}, \quad e_f = 0.5 \quad \dots\dots\dots (14)$$

吉成の式¹¹⁾

$$R_d = \frac{1}{2} \times \frac{e_f \cdot 2 \cdot W_h \cdot h}{s + 1/2 \cdot k} = \frac{0.5 \times W_h \cdot h}{s + 1/2 \cdot k}, \quad e_f = 0.5 \quad \dots\dots\dots (15)$$

Hiley 式

$$R_d = \frac{e_f \cdot W_h \cdot h}{s + 1/2(c_1 + c_2 + c_3)} \times \frac{W_h + c_p^2 \cdot W_p}{W_h + W_p}, \quad e_f = 0.8, \quad e_p = 0.5 \quad \dots\dots\dots (16)$$

Weisbach 式¹²⁾

$$R_d = 0.45 \times \frac{A_p \cdot E_p}{l_p} \cdot \left(-s + \sqrt{s^2 + \frac{2 \cdot W_h \cdot h}{A_p \cdot E_p} \cdot l_p} \right) \dots\dots\dots (17)$$

SO式¹³⁾ (又は Danish 式)

$$R_d = \frac{\alpha \cdot W_h \cdot h}{s + 1/2 \cdot S_0}, \quad S_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot \alpha \cdot W_h \cdot h \cdot l_p}{A_p \cdot E_p}} \dots\dots\dots (18)$$

Engineering News 式¹³⁾

$$R_d = \frac{0.5 \cdot W_h \cdot h}{s + 0.25} \dots\dots\dots (19)$$

k : 実測リバウンド量 (cm), c_1, c_2, c_3 : それぞれクッション, 杭, 地盤の弾性圧縮量 (cm), A_p, E_p, l_p : それぞれ杭の断面積 (cm²), 弾性係数 (kg/cm²), 杭長 (cm)

(2) 杭打ち公式と波動理論による解法との比較

ハンマー重量, 杭径および杭長を変化させて各々の場合について貫入量は $s=5\text{mm}$ として, 上記の杭打ち公式および波動理論による解法による動的支持力を計算する。

波動理論解法で用いる論定数は次の通りである。

打撃効率 $e=0.8$, 落高 $h=200\text{cm}$, クッションのスチフネス係数 $S_c=125\text{kg/cm}^2/\text{cm}$, クッションの反撓係数 $e_2=0.5$, くいコンクリートの弾性係数 $E_p=4 \times 10^5\text{kg/cm}^2$, 杭の単位重量 $\gamma_p=0.0025\text{kg/cm}^3$, 地盤の最大弾性変位量 $Q=0.25\text{cm}$, 先端地盤減衰定数 $J_p=0.005\text{sec/cm}$, 周辺地盤減衰定数 $J_s=0.00167\text{sec/cm}$, 杭コンクリートの内部摩擦係数 $B=0.0001\text{sec}$

上記の杭打ち公式の中で(14), (15), (16)式の場合には, 実測リバウンド量 k , 又は $c_1+c_2+c_3$ のかわりに波動理論による解法によって得られた c_2+Q を用いた。(18)式では $\alpha=0.5$ とした。かようにして得られた杭打ち公式による動的支持力 R_d と波動理論解 R_w とを比較した結果をまとめると表 8 のようになる。又, 波動理論解法, 旧市街地建築物法式(13), 吉成の式(15), SO式(18)による支持力—貫入量曲線の 1 例を図 8 に示す。

表 8 くい打ち公式と Smith 解法との比較 (貫入量 $S=5\text{mm}$)

杭 長 $l_p(\text{m})$	杭断面積 $A_p(\text{cm}^2)$	ハンマー重 $W_h(\text{t})$	Smith 解 $R_w(\text{t})$	R_d/R_w						
				旧 市	鋼くい*1	吉 成*1	Hiley*2	Weisbach	SO	ENR
13	582	1.25 2.2	114 166	1.05 1.27	2.40 2.51	1.20 1.26	1.05 1.31	0.88 0.86	1.00 1.03	1.46 1.75
	1153	3.2 4.0	275 314	1.12 1.22	2.40 2.46	1.20 1.23	1.14 1.25	0.85 0.85	1.00 1.01	1.56 1.68
25	582	1.25 2.2	113 166	1.06 1.27	2.02 2.10	1.01 1.05	0.71 0.90	0.69 0.66	0.84 0.83	1.48 1.76
	1153	3.2 4.0	272 314	1.13 1.22	2.03 2.08	1.01 1.04	0.78 0.86	0.67 0.66	0.82 0.83	1.57 1.69
40	582	1.25 2.2	110 162	1.09 1.30	1.94 1.88	0.97 0.94	0.59 0.69	0.59 0.55	0.74 0.72	1.52 1.79
	1153	3.2 4.0	265 309	1.16 1.22	1.87 1.87	0.94 0.93	0.62 0.66	0.56 0.55	0.72 0.71	1.60 1.73

*1 k の代りに c_2+Q を用いる。

*2 $c_1+c_2+c_3$ の代りに c_2+Q を用いる。

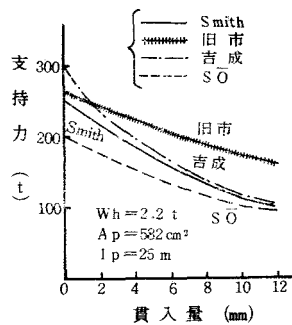


図8 支持力—貫入量曲線の比較

(3) 載荷試験による支持力と各種公式による支持力との比較

各方面の杭打ち計測例を用いて動的支持力 R_d と静的支持力 R_b との比 R_d/R_b を算出した。又、載荷試験が行われた場合については R_d と極限荷重 R_a との比 R_d/R_a を求めた。これらの結果をまとめると表 9 のようになる。ここで静力学的支持力 R_b の計算には建築基礎構造設計規準¹¹⁾ による次の式を用いた。

$$R_b = 30 \cdot \alpha \cdot N \cdot A_p + \left(\frac{N_s \cdot L_s}{5} + 2 \cdot N_c \cdot L_c \right) \cdot \phi \dots \dots \dots (20)$$

ただし本研究では $\alpha=1$ とした。

(4) 計算結果の検討

a) 波動理論による解法 この解法による打撃抵抗 R_u は表 9 に見られるようにおおむね安全側の値を示しており、打撃条件の変化に十分対応出来るものと思われる。

b) 杭打ち公式

旧市街地建築物法式(13)の適合性は良好である。この式による支持力は Smith 解より若干高めに出来る。この傾向は図 9 に見られるように貫入量が大きくなるほど著しくなる。

鋼ぐい式(14)は過大な結果をもたらす。吉成式は鋼ぐい式による支持力の 1/2 の値を与えるがこの式の適合性は良好であり、おおむね安全側の結果が得られる。しかし実測リバウンド量 k は一般にばらつきが多く、リバウンド量が低目に出る場合には過大な結果をもたらす心配がある。

Hiley 式(16)を用いると安全側の結果が得られるが、表 8、表 9 に見られるように杭が長大な場合には過小な結果がもたらされる。これは打撃エネルギーの損失の表わし方に欠かんがあるためである。

Weisbach 式(17)は若干低目の結果をもたらす。杭長 l_p が大になるほど過小な支持力がもたらされる。

S O 式(18)は $\alpha=0.5$ とした場合、少し低めではあるが妥当な結果が得られる。(17)式と同様杭長 l_p が大になると小さな支持力が得られる。

Engineering News 式(19)は過大な結果をもたらす、適合性はよくない。

(5) 杭打ち公式の基本形についての考察

上述の基本形(10)式、(12)式について考察する。

a) 有効打撃エネルギー 打撃エネルギー E_0 としては 2・(3) で述べたようにディーゼル・ハンマーの場合にも $E_0 = W_h \cdot h$ を用いるべきものと思われる。

表9 載荷試験による極限荷重 R_a および静的支持力 R_0 と動的支持力 R_d との比較

$W_h(t)$	$A_p(\text{cm}^2)$	$l_p(m)$	$h(\text{cm})$	$s(\text{mm})$	$k(\text{mm})$	極限荷重 $R_a(t)$	静的 支持力 $R_0(t)$	Smith	田 市	吉 成	Hiley*2	Weisfach	S O	ENR
4.0	930	42	240	2.	25.		599	0.63	0.87	0.55	0.41	0.30	0.43	1.78
3.2	1153	24	190	2.	12.9	357	363	0.98 0.96	0.93 0.91	1.01 0.99	0.78 0.37	0.56 0.55	0.78 0.77	1.89 1.86
3.2	1153	24	198	1.2	15.5	360	363	1.08 1.07	1.01 1.00	0.99 0.99	0.78 0.77	0.59 0.59	0.86 0.85	2.40 2.38
3.2	1153	24	210	1.2	14.	450	363	0.89 1.10	0.84 1.05	0.91 1.13	0.71 0.88	0.49 0.60	0.71 0.88	2.02 2.50
3.2	1153	24	200	2.2	15.8	515		0.68	0.67	0.61	0.48	0.40	0.55	1.32
4.0	2560	27	200	3.9	7.		628	0.68	0.64	0.86	0.54	0.46	0.57	1.00
2.2	546	23	170	7.5	14.	153	188	0.82 0.66	1.07 0.87	0.84 0.69	0.75 0.61	0.60 0.49	0.70 0.57	1.22 0.99
2.2	725	23	180	1.2	19.5	201	227	1.19 1.06	1.11 0.99	0.90 0.79	0.73 0.65	0.68 0.60	0.98 0.87	2.66 2.36
2.2	582	22	160	3.0	13.	237	174	0.79 0.99	0.78 1.06	0.78 1.06	0.70 0.95	0.46 0.63	0.61 0.83	1.35 1.84
2.2	582	22	165	5.	10.	225	174	0.67 0.86	0.77 1.0	0.81 1.05	0.72 0.93	0.46 0.59	0.56 0.73	1.08 1.39
2.2	582	22	180	1.	15.	240	174	0.92 1.62	0.94 1.30	0.97 1.34	0.86 1.19	0.53 0.72	0.78 1.07	2.36 3.25
2.5	582	30	200	3.2	23.		347	0.58	0.75	0.49	0.41	0.33	0.45	1.27
2.2	546	13	200	7.	10.		170	0.85	1.15	1.08	1.15	0.75	0.86	1.86
2.0*1	546	13	200	7.	17.		170	0.79	1.05	0.76	0.79	0.71	0.80	1.24
3.0*1	546	13	200	14.	11.		170	0.74	1.25	0.91	1.05	0.72	0.75	1.07
3.5	1153	15	260	2.2	12.	445	462	0.94 0.91	1.11 1.06	1.25 1.20	1.17 1.13	0.69 0.67	0.95 0.91	2.18 2.10
3.5	1153	15	180	4.7	16.	330	276	0.82 0.98	0.93 1.11	0.75 0.90	0.70 0.84	0.68 0.81	0.81 0.96	1.33 1.59
6.0*1	1153	15	250	9.8	18.	330	276	1.06 1.27	1.83 2.19	1.21 1.45	1.33 1.59	0.32 0.38	1.09 1.30	1.85 2.21
6.0*1	1153	15	250	6.4	16.	315	324	1.33 1.30	2.17 2.10	1.65 1.61	1.82 1.77	1.12 1.09	1.36 1.33	2.68 2.60
4.3	1442	24	260	0.6	8.	> 750	505	>0.84 1.25	>0.87 1.29	>1.62 2.40	>1.29 1.92	>0.43 0.64	>0.65 0.97	>2.40 3.57
2.2	764	22	220	2.4	14.2	345	273	0.70 0.88	0.75 0.95	0.74 0.93	0.60 0.76	0.44 0.55	0.60 0.76	1.43 1.82

*1 ドロップハンマー

*2 $e_1 + e_2 + e_3$ の代りに k を用いる。

(10), (12)式の中の $\alpha \cdot E_0$ は打撃エネルギー $E_0 = W_h \cdot h$ の中で杭頭まで伝達されるエネルギー, すなわち *Enthru* を表わすと考えるのが妥当と思われる。つまり, 打撃エネルギー E_0 からハンマーにおける損失およびクッションにおける損失をさし引いたものである。

Enthru と打撃エネルギー E_0 との比は表2, 表3に見られるように普通の場合, おおよそ0.5程度であると考えられる。したがって, 杭打ち公式の基本形でも $\alpha=0.5$ とすることが合理的であると思われる。

h) リバウンド量 基本式(10)の Δ は Hiley 式(16)では $1/2(c_1 + c_2 + c_3)R_d$ で表わされている。この中で, クッションの弾性圧縮量 c_1 はその値が小さいとして無視されることが多い。これは打撃エネルギーのクッションにおける損失を無視することになる。実際にはクッションにおけるエネルギー損失は可成り大きい。しかし, a) で述べたようにクッションにおける損失を $\alpha \cdot W_h$ の項の中に含ませるならば $c_1=0$ とすることに支障はない事となる。

次に, $c_2 + c_3 = c_2 + Q$ は実際には次の3通り方法のいずれかで処理される。

i (13), (19)式のように定数をあてる。

ii (14), (15)式のように $c_2 + Q$ の実測値であるリバウンド量 k を用いる。

iii (16), (17), (18)式のようにある値を仮定する。

iii の場合, (17)式では $c_3=0$, $c_2 = R_d \cdot l_p / (A_p \cdot E_p)$ とし, (18)式では $c_3=0$, $c_2 = \sqrt{2 \cdot \alpha \cdot W_h \cdot h \cdot l_p / (A_p \cdot E_p)}$ としている。この場合, 表8, 表9に見られるように杭長 l_p が大きくなると支持力 R_d は小さくなる。

杭の弾性圧縮量である c_2 を波動理論による解法で求めると, その値は SO 式における $c_2 = S_0$ の 0.49~0.58 倍程度になっており矢張り杭長 l_p の平方根に大よそ比例している。このために(14), (15)式で実測リバウンド量 k のかわりに $c_2 + Q$ の Smith 解を用いても l_p の増加と共に支持力は小さくなっている。実測リバウンド量はばらつきが多く明確な結論は得られないが, 表9の中の資料では, $Q=0.25\text{cm}$ としたとき, 大よそ $k \doteq (c_2 + Q) + 0.25 = c_2 + 0.5(\text{cm})$ になっており, 実測リバウンド量も杭長 l_p と共に増加の傾向が認められる。

ところが波動理論による解法を用いて得られる打撃抵抗 R_W は表8に見るように杭長 l_p に事実上無関係になっている。

この点が杭打ち公式と波動理論による解法の大きくくいちがう点であり, この点について今後さらに検討したい。

しかし, i の場合のように, (12)式の c に単一の数値をもって来ただけでは打撃条件の変化に十分対応することは出来ない。(12)式を $R_d = 0.5 \cdot W_h \cdot h / (s + c)$ のように書き直したとき, 表8の中に示す打撃条件の下では, 貫入量 $s = 0.25 \sim 1.0\text{cm}$ の範囲で, Smith 解 R_W に等しい支持力 R_d をもたらす c の値は 0.6~0.85 の範囲にあり, 平均して 0.75cm である。

§4 あとがき

本研究の結論を次に要約する。

(1) 波動理論による解法について

i 普通の場合, キャップブロックおよびクッションを1体と考えたときのスチフネス係数は $S_c = 125\text{kg/cm}^2/\text{cm}$ とすることが出来る。

ii 杭打ち止め時の地盤の抵抗配分は $R_{up}/R_u = 0.5$ として良い。

iii 地盤の最大弾性変位量 Q , 地盤の減衰定数 J , その他の諸定数については Smith の提案したものを使うことが出来る。

iv 上記のような諸定数を用い, 打撃効率 $e=0.8$ として得られる打撃抵抗はおおむね安全側にあ

り、この解法は打撃条件の変化に対応出来るものと思われる。

(2) 杭打ち公式について

- i 旧市街地建築物法式および吉成式の適用性は良好であると考えられる。
- ii S O式, Hiley 式, Weisbach 式はいずれも安全側の結果が得られるが長大な杭に対しては過小な結果をもたらす傾向がある。
- iii Engineering News 式および鋼ぐい式は一般に過大な結果をもたらす。

最後に終始御指導を頂いた京都大学工学部岡田清教授に厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 吉成元伸：打撃工法，P C くい基礎の最近の進歩，プレストレストコンクリート技術協会，昭和48年10月
- 2) Smith, E.A.L. : Pile Driving Analysis by the Wave Equation, ASCE, SM4, pp. 35—61, 1960—8
- 3) Hirsch, T.J. : Fundamental Design and Driving Consideration for Concrete Piles, Highway Research, 1936
- 4) 岡田清・久良喜代彦：コンクリート杭の打撃応力について，土木学会論文報告集 252号，1976—8
- 5) Ripperger, E.A. : Longitudinal Impact of Cylindrical Bars, Proc. SESA, 10—1, 1952
- 6) 岡田清・久良喜代彦：コンクリートくいの内部摩擦に関する実験的研究，土木学会第30回年次学術講演会集，1975
- 7) 高強度パイル研究会施工分科会：施工法別による支持力調査，コンクリートポールパイル協会高強度パイル研究会第4回本委員会資料，1976—7
- 8) 久良喜代彦・丸上晴朗：くいの打撃力についての実験的研究，呉高専研究報告9巻1号，1974—2
- 9) Forehand, P.W. and J.L. Reese : Prediction of Pile Capacity by the wave Equation, ASCE SM2, pp. 1—25, 1964—3
- 10) H.M. Coyle and K.W. Korb : Soil Resistance Parameters for Wave Equation Analysis, Journal of Materials, ASTM, 1972—12
- 11) 日本建築学会編：建築礎構造設計規準・同解説・日本建築学会，昭和49年11月
- 12) 建築学会構造標準委員会基礎構造分科会：杭打公式の適用性に関する研究，日本建築学会論文報告集第59号，pp. 28—35, 昭和33年6月
- 13) Agerschou, H.A. : Analysis of the Engineering News Pile Formula, ASCE SM5, pp. 1—11, 1962—10

(昭和51年11月1日受付)

履歴減衰と等価粘性減衰(その1)

(建築学科) 門 前 勝 明

Hysteretic Damping and Equivalent Viscous Damping (Part 1)

Katsuaki MONZEN

By equating the resonant frequency, energy dissipated per cycle at resonance, critical damping coefficient, and damping factor in a hysteretic system to those in the linear system, the efficiency of several equivalent linear models to simulate the maximum inelastic response of hysteretic single-degree-of-freedom system is discussed.

From the response results to sinusoidal excitation and earthquake like excitation, it is shown that when the damping factor of the equivalent linear model is determined, the characteristic of excitation must be taken into account in various methods, especially for the response displacement wave deviating from the time axis.

§ 1 緒 言

1968年の十勝沖地震で鉄筋コンクリート構造物が著しい被害を受けたことを契機に、鉄筋コンクリート構造物または構造部材の静・動的繰り返し実験結果や鉄筋コンクリート構造物を対象にした種々の復元力特性モデルによる地震応答解析結果は多数報告されているが、未だ不明な部分が多く、大地震に対する終極強度概念を与えるに十分であるとは言えない。

既報¹⁾で鉄筋コンクリート骨組を対象に簡単な履歴モデルを設定し、地震波による応答解析結果を報告したが、減衰が地震応答性状に及ぼす影響はかなり大きいことを述べた。本報告は鉄筋コンクリート構造物などにしばしば見られる複雑な履歴特性を適当な折線モデルに置換する際のバネに与える減衰値を設定する予備資料として、簡単な履歴モデル(完全弾塑性系)を等価な粘性減衰を有する線形系に置換し、両系の地震応答結果を比較することで、履歴減衰と粘性減衰の関係を見い出そうと言うものである。

等価粘性減衰に関する考えは、元来、荷重-たわみ関係を線形系に理想化して、簡単な設計法を見い出そうと言うもので、古くから研究結果が多数報告されている。

1930年、Jacobsen は両系が1サイクル当りに吸収するエネルギーの釣合いが重要であることを指摘した。1943年 Kryloff, 1951年 Bogoliuboff は(1)式で与えられる非線形方程式を(2)式の線形方程式で置き換えることを提案している。

$$m\ddot{x} + kx + f(x, \dot{x}) = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

$$m\ddot{x} + \bar{k}\dot{x} + kx = 0 \quad \cdots \cdots \cdots (2)$$

1954年、Caughey と Ergin は(2)式の \bar{k} と k は(1)式と(2)式の差の自乗平均値が最小になるよう選べばよい結果が得られることを報告している²⁾。1960年、Jacobsen³⁾が吸収エネルギーの釣合い条件より等価粘性減衰定数は(3)式で与えられることを報告して以来、各種の仮定に基づく研究結果が多数報告されているが、地震波による応答解析によって結果の検討までなされている例は少なく^{2), 5), 6)}

十分であるとは言えない。

$$\nu_{eq} \doteq \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Frictional Wark Area}}{\text{Work Area under Skeleton}} \dots\dots\dots(3)$$

§ 2 解析方法

P.C. Jennings⁴⁾ は、完全弾塑性系の定常共振状態における等価線形系の粘性減衰値を (1)質量, (2)剛性または振動数, (3)1 サイクル当りのエネルギー吸収量を基に定めている。

一般に非線形系および等価な線形系の正弦波による運動方程式は(4)式と(5)式で与えられる。

$$m\ddot{x} + P(x) = F_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(4)$$

$$m(x_0)\ddot{x} + c(x_0)\dot{x} + K(x_0)x = F_0 \sin \omega t \dots\dots\dots(5)$$

ここで、線形系の各パラメーターは次式で与えられる。

$$\omega_1(x_0) = \sqrt{K(x_0)/m(x_0)} \dots\dots\dots(6)$$

$$C_c(x_0) = 2\sqrt{K(x_0)m(x_0)} \dots\dots\dots(7)$$

$$h(x_0) = C_c(x_0)/C_c(x_0) \dots\dots\dots(8)$$

$$E_e(x_0) = 2\pi h(x_0)K(x_0)x_0^2 \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $\omega_1(x_0)$ = 等価線形系の固有振動数、 $C_c(x_0)$ = 臨界減衰係数、 $h(x_0)$ = 減衰定数、 E_e = 共振振動サイクル間の減衰による吸収エネルギー量。

2.1 解析法 1 (M1)

両系の質量、バネ、振幅、吸収エネルギー量は相等しいと仮定し、振動数の変化は無視する。

$$m(x_0) = m$$

$$K(x_0) = K$$

$$2\pi h(x_0)K(x_0)x_0^2 = 2\pi h(x_0)Kx_0^2 = 4Kx_y(x_0 - x_y)$$

$$\therefore h(x_0) = \frac{2}{\pi} \frac{x_y}{x_0} \left(1 - \frac{x_y}{x_0}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \dots\dots\dots(10)$$

等価線形系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2h(x_0)\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \dots\dots\dots(11)$$

ここで、 $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ 、 x_0 = 最大変位、 x_y = 完全弾塑性系の降伏変位、 $\mu = x_0/x_y$ (ductility factor)。

2.2 解析法 2 (M2)

両系の質量、振幅、吸収エネルギー量は相等しいと仮定し、両系の振動数が等しくなるように等価線形系のバネ定数を定める。

$$m(x_0) = m$$

$$K(x_0) = m\omega_0^2(x_0)$$

$$2\pi h(x_0)K(x_0) = 4Kx_y(x_0 - x_y)$$

ここで、 $\omega(x_0)$ は完全弾塑性系の共振振動数であるが、定数変化法による近似解より次のように得ることができる。

$$\frac{\omega^2(x_0)}{\omega_0^2} = \frac{1}{\pi} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) \dots\dots\dots(12)$$

$$\theta = \cos^{-1}(1 - 2x_y/x_0)$$

$$\therefore h(x_0) = \frac{2 \frac{x_y}{x_0} \left(1 - \frac{x_y}{x_0}\right)}{\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta} = \frac{\frac{2}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)}{\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta} \dots\dots\dots(13)$$

$$C_c = \frac{2\omega(x_0)}{\omega_0} \sqrt{Km} \dots\dots\dots (14)$$

この場合、等価線形系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2h(x_0)\omega(x_0)\dot{x} + \omega_0^2(x_0)x = \frac{F_0}{m} \sin \omega t \dots\dots\dots (15)$$

2・3 解析法 3 (M3)

両系の振幅とエネルギー吸収量は相等しいと仮定し、両系の振動数が等しくなるよう質量を変化させる。

$$m(x_0) = K/\omega^2(x_0)$$

$$K(x_0) = K$$

$$2\pi h(x_0)K(x_0)x_0^2 = 4Kx_y(x_0 - x_y) = 4Kx_y^2(\mu - 1)$$

$$\therefore h(x_0) = \frac{2}{\pi} \frac{x_y}{x_0} \left(1 - \frac{x_y}{x_0}\right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \dots\dots\dots (16)$$

$$C_c(x_0) = \frac{2\omega_0}{\omega(x_0)} \sqrt{Km} \dots\dots\dots (17)$$

この場合、等価線形系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2h(x_0)\omega(x_0)\dot{x} + \omega^2(x_0)x = \frac{F}{m} \frac{\omega^2(x_0)}{\omega_0^2} \sin \omega t \dots\dots\dots (18)$$

$h(x_0)$ は解析法(1)に $C(x_0)$ は解析法(2), (3)に等しくなる。

2・4 解析法 4 (M4)

両系の振動数、エネルギー吸収量、振幅は相等しいと仮定し、両系の臨界減衰係数は相等しく且つ一定とする。

$$K(x_0)m(x_0) = Km$$

$$\frac{K(x_0)}{m(x_0)} = \omega^2(x_0)$$

$$2\pi h(x_0)K(x_0)x_0^2 = 4Kx_y(x_0 - x_y)$$

(12)式より、

$$h(x_0) = \frac{\frac{2}{\pi} \frac{x_y}{x_0} \left(1 - \frac{x_y}{x_0}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)}} = \frac{\frac{2}{\pi} \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\pi} \left(\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta\right)}} \dots\dots\dots (19)$$

この場合、等価線形系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2\omega(x_0)h(x_0)\dot{x} + \omega^2(x_0)x = \frac{F_0}{m} \frac{\omega(x_0)}{\omega_0} \sin \omega t \dots\dots\dots (20)$$

2・5 解析法 5 (M5)

両系の質量、振幅、エネルギー吸収量は相等しいと仮定し、等価線形系の剛性を最大振幅と原点を結ぶ直線を与える。

$$m(x_0) = m$$

$$K(x_0) = Kx_y/x_0$$

$$2\pi h(x_0)K(x_0)x_0^2 = 4Kx_y(x_0 - x_y)$$

$$h(x_0) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x_y}{x_0}\right) = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \dots\dots\dots (21)$$

この場合、等価線形系の運動方程式は次式で与えられる。

$$\ddot{x} + 2\frac{\omega_0}{\mu}\dot{x} + \frac{\omega_0^2}{\mu}x = \frac{F_0}{m}\sin\omega t \dots\dots\dots (22)$$

2・6 解析法 6

(3)式において、Frictional Work Area を $2Kx_y(x_0 - x_y)$ 、Skeleton を図1に示す ABC とすれば、

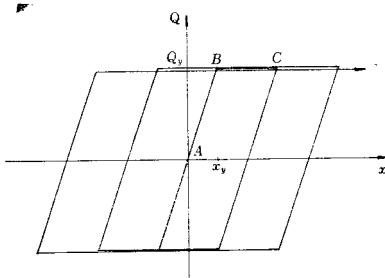


図1 復元力特性

Work Area は $Kx_y\left(x_0 - \frac{x_y}{2}\right)$ となるので、

$$h(x_0) = \frac{\frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{x_y}{x_0}\right)}{2 - \frac{x_y}{x_0}} \dots\dots\dots (23)$$

を得る。この場合、等価線形系の剛性が定義できないので等価線形系を定めることはできない。

2・7 計算方法

等価線形系の各パラメーターは ductility factor の関数として与えられるものもあるので、先ず完全弾塑性系の地震波による最大変位応答値を計算する。求めた完全弾塑性系の最大変位応答値を使用して等価線形系の各パラメーターを定め、同じ地震波による等価線形系の応答値を求め両者を比較する。

使用した地震波は TAFT, 1952年, EW 成分の最大加速度を $0.33g$ にしたもの始発より2秒から12秒までの10秒間と最大加速度 $1g$ の正弦波8種類 (ω を変化) 10秒間である。大地震動の継続時間は測定結果より30秒程度、解析結果では断層又は震央付近で50秒程度と言われているが⁸⁾、断層又は震央付近の測定は未だ取れていない。特殊な増合として1968年十勝沖地震のように継続時間120秒という場合もある。地震継続時間中に特に関与する構造物の挙動に影響を与えると思われる主要動部分は10秒から13秒程度と言われている。本報告の計算時間10秒間は主要動部分10秒に対応するものである。正弦波地動の場合、系に適当な減衰があれば2～3サイクル後定常振動状態に移るものと思われる。本報告の場合、構造物の周期を0.5秒に固定し、正弦波地動の周期を変化させたので構造物と地動の振動数比 λ (ここで $\lambda = \omega/\omega_0$, ω ; 地動の振動数, ω_0 ; 構造物の振動数) が最小の場合に地震継続時間が問題となる。振動数比 $\lambda = 0.2$ の場合、地震動の周期は2.5秒となり、応答結果は10秒間で十分定常振動状態になるものと思われる。完全弾塑性系の弾性固有周期 T_0 は地震動が TAFT の場合、 $T_0 = 0.2 \sim 2.0$ 秒までを0.2秒きざみ、 $T_0 = 2.0 \sim 3.0$ 秒までを0.5秒きざみの12種類とし、地震動が正弦波の場合、 $T_0 = 0.5$ 秒に固定した。正弦波の振動数は構造物との振動数比 λ が0.2から1.6になるよう適当に変化させた。マグニチュード約6.5の地震による観測結果より、地震動の周期は地盤状態によってかなり異なり、次のような値になると報告⁷⁾されている。

Geologic Condition

Rock

Stiff Soil

Period of Motion (T_0)

0.36～0.47 sec

0.62～0.92 sec

Deep Cohesionless Soil

0.61~1.3 sec

正弦波の周期が上記の地震動周期 T_g に対応するものと仮定し、建築構造物の1次固有期 T_1 と層数 N の関係を(24)式で表わせば、 $\lambda = \frac{T_1}{T_g} = 0.2$ の場合1階から3階の建物に相当し、 $\lambda = 1.6$ の場合8階から30階程度の建物に相当することになる。

$$T_1 = (0.08 \sim 0.1)N \dots\dots\dots (24)$$

降伏せん断力 (Q_y) は線形最大応答せん断力 (Q_e) によって適当に変化させた。

§ 3 応答結果とその検討

完全弾塑性モデル（以後 E.P モデルと記す）と等価線形モデルの応答結果を比較する場合、種々の応答値が考えられるが、本報告の場合変位応答値に限定する。さらに耐震設計上の立場から、E.Pモデルの最大応答値が $\mu=3\sim4$ 程度までを主な比較対象範囲としたが、この範囲に限定したわけではない。

3.1 正弦波による応答特性

図2に正弦波による応答結果を降伏せん断力係数 k_y （降伏せん断力 Q_y /自重 mg ）と ductility factor μ の関係で示す。等価線形系の ductility factor は定義できないが、便宜上、等価線形系の最大応答変位を対応する E.P モデルの降伏変位で除した値を等価線形系の ductility factor と定義する。 $\lambda=0.2$ の場合（図2-1参照）、M1モデルはE.Pモデルに比較して全般的にかなり小さな応答値を示しているが、M2モデルとM5モデルはかなりよく一致していると言うことができよう。 $\lambda=1.0$ の場

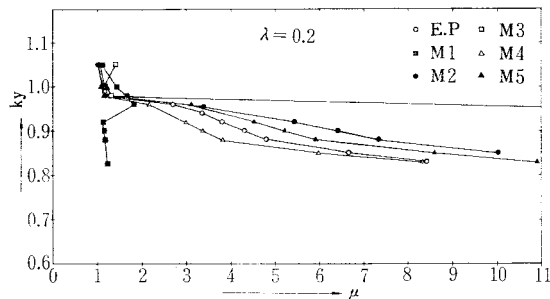


図2-1 降伏せん断力係数—塑性率曲線

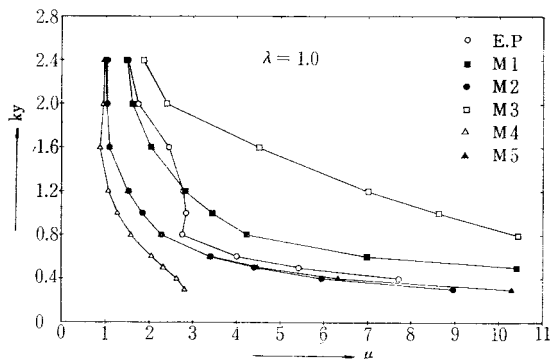


図2-2 降伏せん断力係数—塑性率曲線

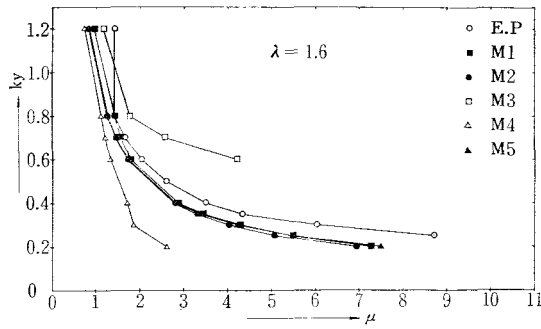


図2-3 降伏せん断力係数—塑性率曲線

合 (図2-2参照), M1モデルは全般的によく一致しているのに比較して, M3モデルは著しく大きな応答値を示し, 反対にM2, M4, M5モデルはかなり小さな応答値を示している。なお $\lambda > 0.8$ の場合, M2モデルとM5モデルの応答値はほとんど一致すると考えてよいようである。 $\lambda = 1.6$ (図2-3) の場合, M1, M2, M5モデルは全般的によく一致しているが, M3モデルは著しく大きな応答値を示し, 反対にM4モデルはかなり小さな応答結果となっている。なお $\lambda > 1.2$ の場合, M1, M2, M5モデルの応答値はほとんど一致すると考えてよいようである。図3に降伏強度は無視し両

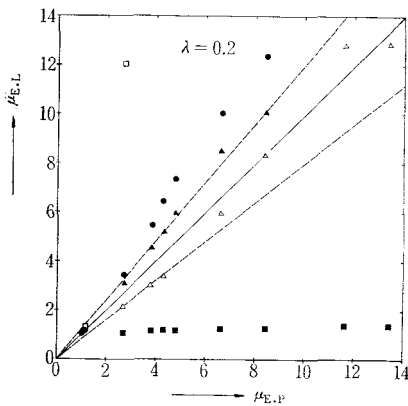


図3-1 両系の ductility factor の相関

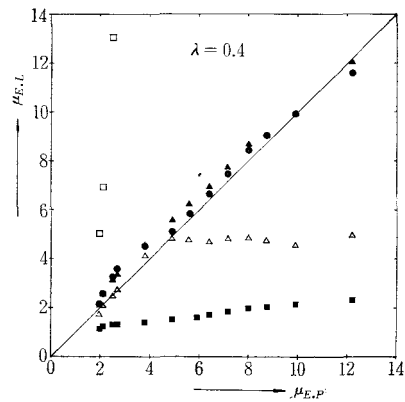


図3-2 両系の ductility factor の相関

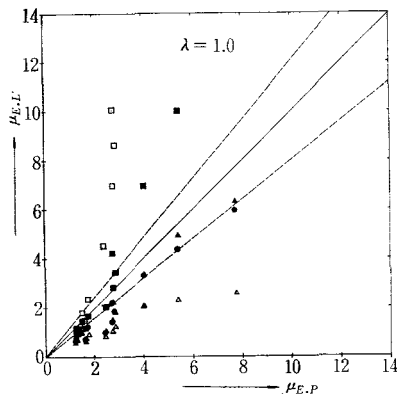


図3-3 両系の ductility factor の相関

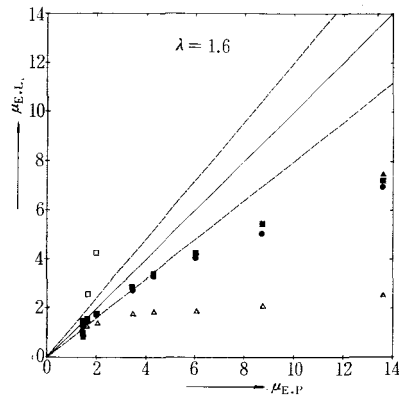


図3-4 両系の ductility factor の相関

系の ductility factor だけに着目して、縦軸に等価線形系の μ を横軸に E.P モデルの μ を取って両者の比較を示したが、上記の特徴をより明瞭に見ることができよう。

図4に E.P モデルと等価線形モデルの応答波形の比較を示す。 $\lambda=0.4$, $k_y=1.05$ (図4-1参照) の場合、すべてのモデルは約1秒以後定常振動状態とみなせる。過度振動部分で各モデル共若干の相異が見られるが、E.P モデルに比較しM1モデルは振動周期、振幅ともよく一致しているが、M4, M5モデルは振幅が少し大きすぎるようである。 $\lambda=1.2$, $k_y=0.6$ (図4-2参照) の場合、すべてのモデルは約0.5秒以後定常振動状態とみなせるようである。 $\lambda=0.4$ の場合と同様各モデルの応答波形は過度振動部分で若干の相異が見られるが、振幅だけに着目するなら、E.P モデルに比較しM5モデルはよく一致していると言えるが、M1モデルは大きすぎ反対にM4モデルは小さすぎるようである。

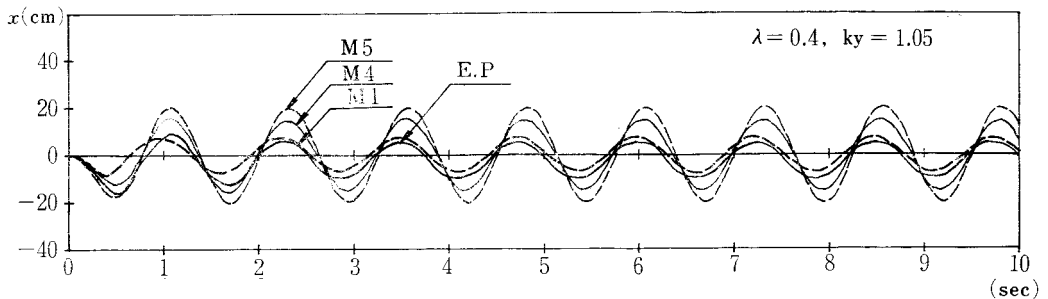


図4-1 変位—時間 曲 線

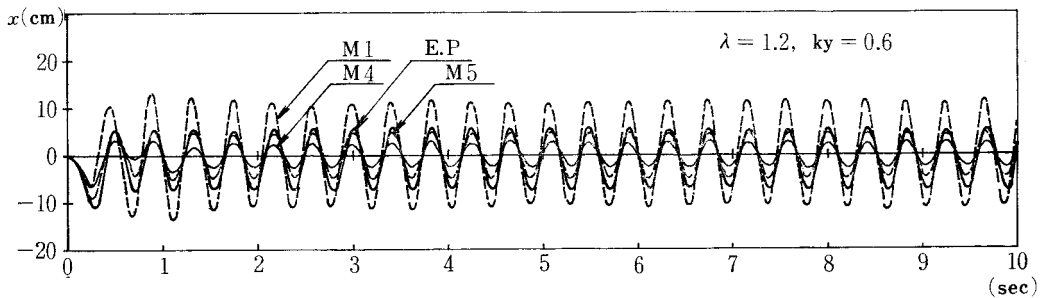


図4-2 変位—時間 曲 線

E.P モデルの最大変位応答と対応する等価線形系の最大変位応答結果の比較を各モデルごとに要約すると次のようになる。

1) M1モデル： $\lambda=0.2\sim0.6$ の範囲で、等価線形系の応答結果は E.P モデルの応答結果よりかなり小さく、最大変位が大きくなるに従ってその誤差も大きくなる。 $\lambda=0.8$ で等価線形系の応答結果は E.P モデルの応答値が $\mu=3$ までは比較的小さいが、 $\mu=4\sim8$ の範囲で両者はほとんど一致する。 $\lambda=1.0\sim1.6$ の範囲で、E.P モデルの応答値が $\mu=3$ までを比較対象とした場合、両者はよく一致していると言える。一般的に線形系の応答値は減衰が大きくなるほど減少する。(11)式からもわかるように、E.P モデルの最大応答変位が弾性最大応答変位よりも大きくなる場合、M1モデルによる近似は限度があると考えられる。本計算結果も全般的に E.P モデルの最大応答変位が降伏せん断力係数 k_y の減少によって増大しない範囲（いわば変位が保存される範囲）では比較的よい一致を見るが、E.P モデルの最大応答変位が降伏せん断力係数の減少によって増大する場合、M1モデルの応答結果は E.P モデルの応答結果に比較して全般的に小さくなる。

2) M2モデル： $\lambda=0.2$ で等価線形系の応答結果はE.Pモデルの応答値が約 $\mu=3$ までは全般的に若干大きいがよく一致していると言える。 $\lambda=0.4$ で、両者の応答結果はほとんど一致し、 $\mu=14$ 程度まで両者に差は認められない。 $\lambda=0.6$ で、両者の応答結果は $\mu=6$ 程度まではよく一致するが、 $\mu>6$ で等価線形系の応答結果はE.Pモデルの応答結果に比較して小さい。 $\lambda=0.8\sim 1.6$ の範囲で等価線形系の応答結果はE.Pモデルのそれに比較して全般的にかなり小さくなる。

3) M3モデル： $\lambda=0.2\sim 1.6$ の範囲で等価線形系の応答結果はE.Pモデルの応答結果に比較して全般的にかなり大きく、 λ が小さいほど両者の差異は著しい。

4) M4モデル： $\lambda=0.2$ で等価線形系の応答結果はE.Pモデルの応答結果に比較して若干小さいが、両者はほとんど一致していると言える。 $\lambda=0.4$ で両者の応答結果は約 $\mu=5$ まではよく一致しているが、E.Pモデルの μ が6以上になるとE.Pモデルの降伏せん断力係数が減少するほど両者の差異も増大する。 $\lambda=0.6$ で両者の応答結果は約 $\mu=3$ まではよく一致しているが、E.Pモデルの μ が3以上になると $\mu=0.4$ の場合と同じ形態で両者の差異が増大する。 $\lambda=0.8$ 以上になると等価線形系の応答結果はE.Pモデルの応答結果に比較して全般的に小さく、両者の差異はE.Pモデルの最大応答変位が降伏せん断力係数の減少によって増大する範囲で著しい。これらの差異は、E.Pモデルの応答特性は適当な降伏強度以下で変位が発散する傾向を示すが、等価線形系の応答特性は λ が0.4以上で変位が保存される傾向を示すためである。

5) M5モデル： $\lambda=0.2\sim 1.6$ の範囲で、M5モデルの応答結果はM2モデルの応答結果にほとんど一致すると見なせる。

以上の応答結果より、E.Pモデルの最大応答変位が適当な降伏せん断力に達すると急激な発散特性を示す $\lambda=0.2\sim 0.4$ の範囲でM4モデルが、また $\lambda=0.2\sim 0.8$ の範囲でM2モデルとM5モデルがよい一致を示す。E.Pモデルの応答特性が変位保存または降伏せん断力の減少によって比較的緩やかな変位増加傾向を示す $\lambda=1.0\sim 1.6$ の範囲でM1モデルが最もよい一致を示すようである。しかし、すべての λ について、E.Pモデルに対応する等価線形モデルを一律に定めるにはかなりの困難があり、地動の特性と構造物の履歴特性を考慮して等価線形モデルを設定する必要があるだろう。

3・2 地震波による応答特性

図5に TAFT, 1952, EW成分波による応答結果を正弦波の場合と同様に降伏せん断力係数 k_y と ductility factor μ の関係で示す。図よりM3モデルを除いて、等価線形モデルの最大変位応答値は対応するE.Pモデルの最大変位応答値に比較して全般的にかなり小さいことがわかる。M3モデルの応答特性は他の等価線形モデルの応答特性に比較すると若干異なるが、少なくともE.Pモデルの応答特性に一致しているとは言えない。

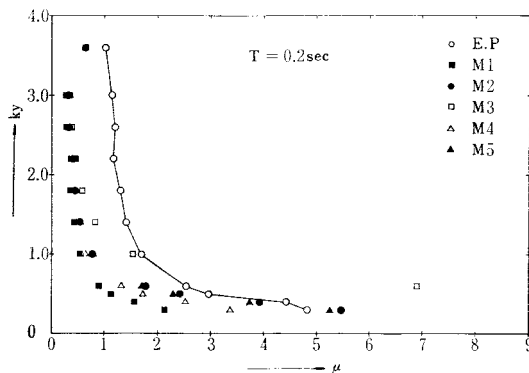


図5-1 降伏せん断力係数—塑性率曲線

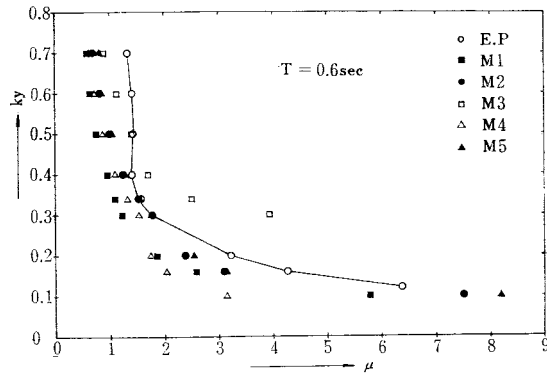


図5-2 降伏せん断力係数—塑性率曲線

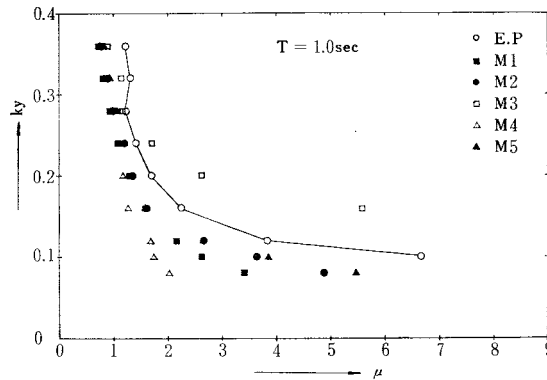


図5-3 降伏せん断力係数—塑性率曲線

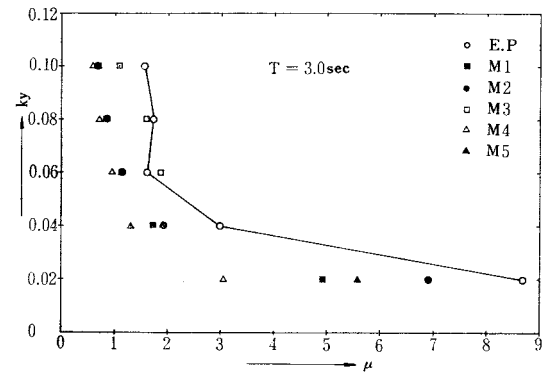


図5-4 降伏せん断力係数—塑性率曲線

図6に E.P モデルと等価線形モデルの応答波形の比較を示すが、両者にかかなりの相異が見られる。もっとも注目すべき相異は、等価線形モデルの応答は主に時間軸を中心に振動を繰り返しているが、E.P モデルの応答波形は変位軸が適当な時刻で一方向へずれることである。たとえば、系の固有周期 $T=0.6$ 秒、 $k_y=0.2$ 秒（図6-2参照）の場合、約 $t=2$ 秒付近でE.P モデルの応答波形は正方向へかなり変位軸のずれが見られる。この特性は等価線形系の設定で考慮されていない特性であり、等価線形モデルの最大変位応答値が対応するE.P モデルの最大変位応答値と比較して全般的にかかなり小さくなった原因の一つと考えられる。正弦波形の場合と同様、地震動の特性と構造物の履歴特性を考慮して等価線形モデルを設定する必要性が認められる。

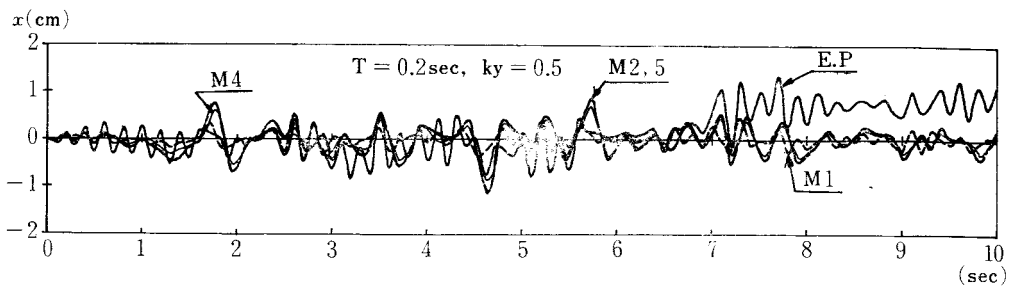


図6-1 変位—時間曲線

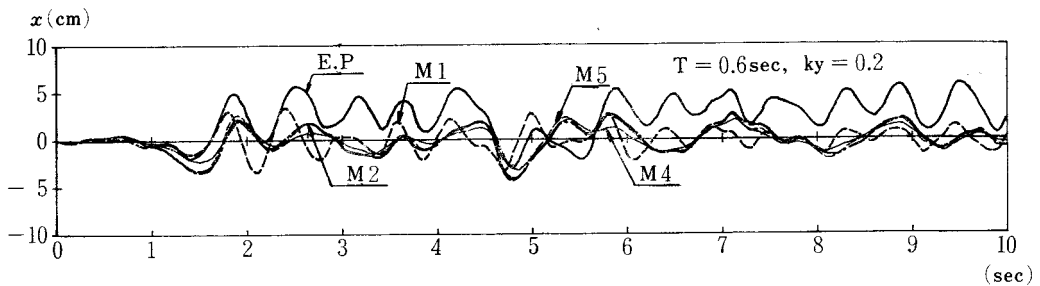


図6-2 変位—時間曲線

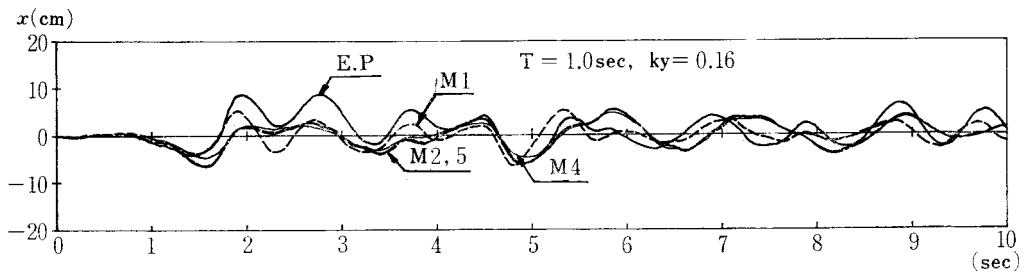


図6-3 変位—時間曲線

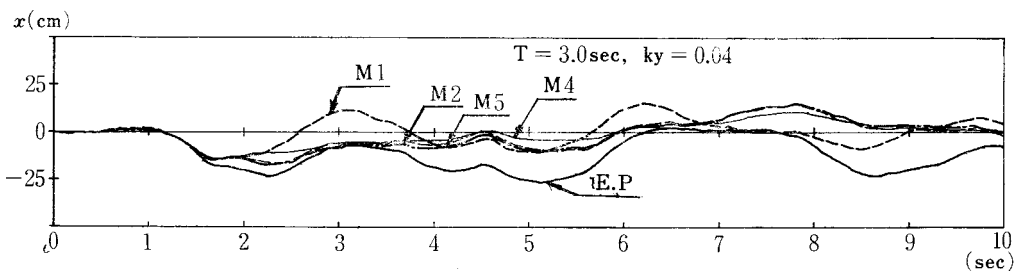


図6-4 変位—時間曲線

§ 4 結 論

以上、鉄筋コンクリート構造物などにしばしば見られる複雑な履歴特性を適当な折線モデルに置換する際のバネに与える減衰値を設定する予備資料として、完全弾塑性モデルを等価な粘性減衰を有する種々の線形系に置換し、両系の地震応答解析結果を比較することでその妥当性を検討した結果、次の結論を得る。

- 1) 正弦波による応答解析結果より、 $E.P$ モデルの最大変位応答が適当な降伏せん断力に達する

と急激な発散特性を示す範囲で、M2, M4, M5 モデルが比較的良好一致を示す。E.P モデルの応答特性が変位保存的傾向を示す範囲でM1 モデルが最も良好一致を示す。しかし、すべての正弦波（振動数が変化）について E.P モデルに対応する等価線形モデルを一律に定めるにはかなりの困難があり、地動の特性と構造物の履歴特性を考慮した減衰値の評価が必要であると思われる。

2) TAFT, 1952, *EW*成分波による応答解析結果より、E.P モデルの変位波形が一方方向へずれるような特性を示す場合、正弦波による定常共振応答特性に基づく粘性減衰値の設定は、応答結果を過少評価する場合が少なくないので注意が必要である。

本報告の計算にあたり、呉工業高等専門学校計算機室 FACOM 230—28S を使用した。関係諸氏に深謝します。

参 考 文 献

- 1) 門前勝明：鉄筋コンクリート骨組の地震応答，呉工業高等専門学校研究報告，第11巻第1号，昭和50年9月
- 2) D.E. Hudson : Equivalent Viscous Friction for Hysteretic Systems with Earthquake-like Excitations, III WCEE, 1964
- 3) L.S. Jacobsen : Damping in Composite Structures, II WCEE, 1960
- 4) P.C. Jennings : Equivalent Viscous Damping for Yielding Structures, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, No. EM1, February, 1968
- 5) Akenori Shibata : Equivalent Linear Models to Determine Maximum Inelastic Response of Nonlinear Structures for Earthquake Motions, Proceedings of the Fourth Japan Earthquake Engineering Symposium, November, 1975
- 6) 南忠夫, 梅村魁：履歴減衰の等価粘性減衰への置きかえについて，日本建築学会関東支部第36回学術研究発表会，1965年6月
- 7) H. Bolton Seed, R. Murarka, J. Lysmer and I.M. Idriss : Relationships between Maximum Acceleration, Maximum Velocity, Distance from Source and Local Site Conditions for Moderately Strong Earthquakes, Earthquake Engineering Research Center, Report No. EERC 57—17, July, 1975, University of California. Berkeley, California
- 8) P.C. Jennings, G.W. Housner and N.C. Tsai : Simulated Earthquake Motions for Design Purposes, IV WCEE, 1969

（昭和51年12月1日受付）

地震による構造物へのエネルギー入力と構造物の エネルギー吸収特性について

(建築学科) 門 前 勝 明

Energy Input to Structures in Earthquakes and Energy Consumption by Structures

Katsuaki MONZEN

The effect of energy dissipation upon structural response to sinusoidal excitation is considered.

A spectral study of the energy relations for an elastoplastic system responding to sinusoidal excitation is described. The results indicate that yielding does not increase the total energy input to the system within the suitable yielding limits, and equal to the total energy input to the linear system, but at near the resonant amplitude the total energy input to the elasto-plastic system is increased by yielding.

§ 1 緒 言

近年、電子計算機の発達と普及に伴い、建築構造物の耐震設計といえば動的解析と答えるほど地震応答解析の手法は広く普及して来たようである。

現行の耐震設計計算規準は1950年建築基準法の制定によって確立されたもので、震度0.2以上すなわち建物に作用する地震外力を建物の重量の20%以上の水平力で代表し、この水平力による構造部材の応力度を許容応力度以下に収めるよう設計しようというものである。この方法は地震動の特性、地震動によって構造物に作用する外力または変形特性、外力または変形によって生ずる応力などきわめて複雑な問題を一括し、さらに部分的には塑性応力まで含めて一挙に建物に対する設計外力を定めたもので、設計の簡便さという点ではたいへん卓抜な方法であるが、地震動や構造物の複雑な特性を考慮すると構造物の安全性を保障するには欠点も多い。

1968年の十勝沖地震を初め1971年のサンフェルナンド地震、1975年大分県中部地震では従来の静的震度による計算法で合理的に設計された、又はそれに準ずる近代的な鉄筋コンクリート構造物が多数破壊した。既往の応答解析結果より¹⁾、建物の固有周期1.5秒くらいまでの一般の建物ではこれを弾性体と考えると、基礎スラブ加速度の3～4倍程度、又はそれ以上の加速度が最上層に入ってくる可能性があるといわれている。これは、もし地震最大加速度を0.3gとすれば、ほとんどの鉄筋コンクリート及び鉄骨鉄筋コンクリート造ビルの上における応答加速度が0.9～1.2g程度になる可能性があることになり、現行の耐震設計計算規準によって忠実に設計された建物が大地震を受けた場合、かなりの塑性部分に入る可能性があることを示し、現行の耐震設計計算規準の改訂が強く叫ばれている。

最近、従来の震度による設計法に代って地震応答解析による設計手法が一部の建築構造物を対象に

普及して来た。この設計方法は、せん断力係数（地震動によって起こされる各階のせん断力をその階より上の全重量で割った値）をもとにして建物の柱、梁の寸法を仮定し、地震応答解析によって上部に作用する力の大きさやその高さ方向の分布を定め、その力に対して仮定断面がおさまるか否かを静的に検討する。これを繰り返すことによって水平外力と断面を決定し、あとは従来の静的な方法で構造計算を行う。決定された断面を持った建物に上記設計で採用した地震よりもさらに大きな地震動（激震で予想される程度の地震動）による塑性振動解析より、建物の塑性に入る部分、塑性の程度を検定して満足な結果が得られるまで計算を繰り返す。耐震設計方針は、経済的理由もあって、しばしば起る中地震で無被害、強地震で降伏前後、まれに起こる烈・激地震で人命尊重の立場から損傷はしても崩壊は避けるというのが一般的原則になっている。

地震応答解析による設計手法が従来の震度による設計法に比較して、地震時の建物の挙動をより忠実に反映したものであることは言うまでもない。しかし、設計地震の選定や建物の複雑な塑性挙動が応答結果に与える影響は極めて大きく、構造物の耐震安全性と大地震に対する終極強度概念を与えるという点を鑑みると未だ不明な部分が多い。

この報告は、構造物が激震を受けた場合の性状を対象に、正弦波地動によって構造物に入ってくる入力エネルギーと構造物によって消費される各種エネルギーの特性を検討することで、構造物の耐震安全性を合理的に評価する資料を得ようとするものである。

構造物の耐震安全性とそのエネルギー吸収特性に関する研究は多数報告されている。たとえば、Housner^{23,24} は速度スペクトルによって与えられる運動エネルギーと構造物のひずみ吸収エネルギーを等置することで構造要素の塑性変形と倒壊限界を求める方法を示している。G. V. Berg と S. S. Thomaides⁴⁾ は地震動によって構造物に入るエネルギーと構造物によって消費されるエネルギーの特性を具体的に求め、Tanes Lord⁵⁾ は地震による構造物の動的安定問題の点から、構造物の塑性変形によるエネルギー吸収能力の重要性について報告している。加藤勉、秋山宏両博士^{6),7),8)} は、地震によって構造物に入る総エネルギーのうち損傷に関与する入力エネルギーと構造物が崩壊に至るまでに吸収しうる塑性歪エネルギーを等置することによって構造物の極限耐震性の評価法を与えている。

§ 2 解 析 方 法

図1に示す1質点系構造物が地震動をうけた場合、質点の運動方程式は次式で与えられる。

$$m\ddot{x} + C\dot{x} + Q(x) = -m\ddot{y}_0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 x = 基礎に対する質点の変位

m = 質点の質量

C = 減衰係数

$Q(x)$ = 復元力

\ddot{y}_0 = 地震加速度

この報告では、構造要素の非線形特性として図2に示す完全弾塑性モデルを使用する。完全弾塑性モデルは鋼構造剛接骨組などで代表される紡錘型履歴特性を有する構造物には比較的よく適合するが、鉄筋コンクリート構造物などで代表される変位の増大に伴って固有ループの剛性が低下する履歴特性を有する構造物にはよいモデルとは言えない⁹⁾。しかし、完全弾塑性モデルは構造物の塑性特性を表わす代表的モデルであり、地震動による構造物の塑性挙動を評価するという観点に立てば、完全弾塑性モデルによる応答解析結果から得られた情報は、一般的構造物が大地震を受けた場合の弾塑性挙動を評価する上で参考になるものと考えられる。

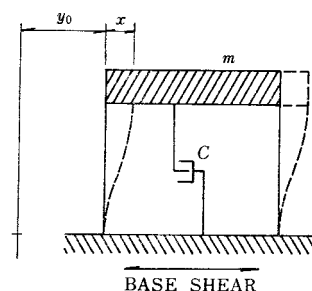


図1 解析モデル

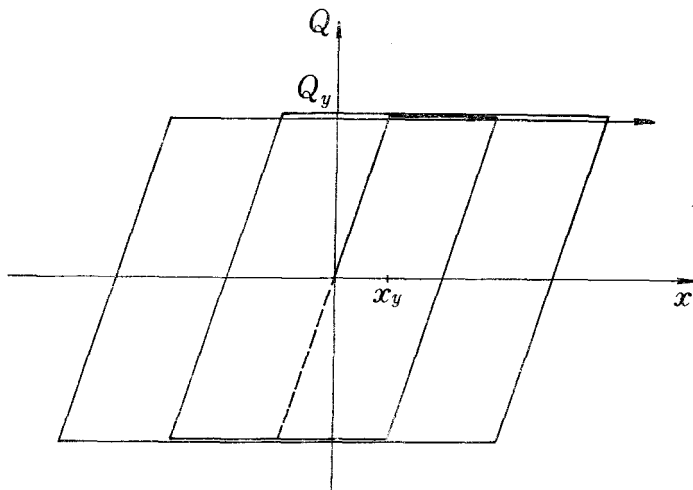


図2 復元力特性

$$q(x) = Q(x)/m$$

$\omega_0 = \sqrt{K/m}$: 減衰がない場合の弾性固有振動数

K = 弾性バネ定数

$h = C/2m\omega_0$: 減衰常数

以上の関係式を使えば、(1)式は m で割ってつぎのように書き直すことができる。

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + q(x) = -\ddot{y}_0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2)式の両辺に $dx = \dot{x}dt$ をかけ地震の継続時間 t にわたって積分すれば質点に作用している力による単位質量当りの仕事（エネルギー）の関係式が得られる^{6),8)}。

$$\int_0^t \ddot{x}\dot{x}dt + 2h\omega_0 \int_0^t \dot{x}^2dt + \int_0^t q(x)\dot{x}dt = -\int_0^t \ddot{y}_0\dot{x}dt \quad \dots\dots\dots (3)$$

(3)式で、左辺第1項は質点の運動エネルギー $E_k = \frac{1}{2}\dot{x}^2$ 、第2項は減衰機構によって吸収されたエネルギー E_D 、第3項はバネ系の塑性歪によって吸収されたエネルギー $E_{p,d}$ と弾性歪エネルギー E_R の和である。この弾性歪エネルギーと運動エネルギーの和が系に残っている弾性振動エネルギーである。右辺は地震外力による系への総エネルギー入力 E_I で、これらの各エネルギーには次の関係式が成り立つ。

$$E_I = E_K + E_R + E_D + E_{p,d} \quad \dots\dots\dots (4)$$

(2)式の両辺に $dy_0 = \dot{y}_0dt$ をかけ地震の継続時間 t にわたって積分すれば質点に作用している力が地震動の変位に対してなす単位質量当りの仕事（エネルギー）の関係式が得られる⁴⁾。

$$\int_0^t (\ddot{x} + \ddot{y}_0)\dot{y}_0dt = -\int_0^t (q(x) + 2h\omega_0\dot{x})\dot{y}_0dt = -\frac{1}{2}(\dot{y}_0 + \dot{x})^2 + 2h\omega_0 \int_0^t \dot{x}^2dt + \int_0^t q(x)\dot{x}dt \quad \dots\dots (5)$$

この場合の総エネルギー入力を E_I とし、絶対速度による運動エネルギーを E_K と書けば、これらの各エネルギーは(4)式と同様に次の関係が成り立つ。

$$E_I = E_K + E_R + E_D + E_{p,d} \quad \dots\dots\dots (6)$$

この報告では地震波として最大加速度 $1g$ の正弦波10秒間を使用する。完全弾塑性系の弾性固有周期 T_0 は0.5秒とし、減衰は無視する。正弦波地動の振動数 ω は、構造物の弾性固有振動数と地動の振動数 ω_0 の比 λ ($\lambda = \omega/\omega_0$) が0.2から0.1きざみで1.6になるよう変化させた。大地震の継続時間は測定結果より30秒程度、解析結果では断層又は震央付近で50秒程度と言われているが、断層又は震央付

近の測定は未だ取れていない¹⁰⁾。特殊な場合として、1968年十勝沖地震のように継続時間 120 秒という場合もある。地震継続時間中、特に構造物の挙動に影響を与えると思われる主要動部分は10秒から13秒間程度と言われている。本報告の計算時間10秒間はこの主要動部分10秒に対応するものである。正弦波地動の場合、系に適当な減衰があれば2～3サイクル後に定常振動状態になるものと思われる。本報告の場合、構造物の周期を 0.5秒に固定し、正弦波地動の周期を変化させたので、構造物と地動の振動数比 λ が最小の場合に地震継続時間が問題となる。振動数比0.2の場合、地動の周期は2.5秒となり、履歴減衰を考慮すれば10秒間で十分定常振動状態になるものと思われる。マグニチュード約6.5の地震による観測結果より、地震動の主要周期は地盤状態によってかなり異なるが、次のような値になると報告されている¹¹⁾。

Geologic Condition	Period of Motion (T_g)
Rock	0.36～0.47 sec
Stiff Soil	0.62～0.92 sec
Deep Cohesionless Soil	0.61～1.3 sec

正弦波の周期が上記の地震動周期 T_g に対応するものと仮定し、建築構造物の1次固有周期 T_1 と層数 N の関係を(7)式で表わせば、 $\lambda = \frac{T_1}{T_g} = 0.2$ の場合1階から3階の建物に相当し、 $\lambda = 1.6$ の場合8階から30階程度の建物に相当することになる。

$$T_1 = (0.08 \sim 0.1) N \quad (7)$$

完全弾塑性モデル (図2参照) の降伏せん断力 (Q_v) は線形最大応答せん断力 (Q_e) によって適当に変化させた。

§ 3 計算結果とその検討

加藤・秋山両博士の研究結果^{6), 7)} (El-Centro, NS 成分による完全弾塑性モデルとスリップモデルの1質点及び5質点系) より、降伏せん断力係数の総エネルギー入力 $E_{I'}$ への影響は比較的小さく、損傷に寄与する入力エネルギー ($E_R + E_{K'} + E_{p.d} = E_{I'} - E_D$, ただし、この報告では $E_D = 0$ と仮定したの

で $E_{I'}$ に対応する) と Housner の導入した $\frac{1}{2} m \dot{x}_e^2, \max$ (この報告では $[E_{K'}]_{\max}$ とはいよい対応を示す (図3参照) ことが報告されている。この報告は主に降伏強度の変化が各種最大エネルギー入力へ与える影響について着目し、入力エネルギー量と変形量の関係等については他の機会に譲ることにする。

図4に変位応答波形と対応するエネルギー応答波形の例を示す。 $\lambda = 0.2$, $k_y = 0.94$ (図4-1, 図7-1参照) の場合、変位応答波形より徐々に変位が増加する一種の共振状態を起しているのがわかる。対応するエネルギー応答波形にもサイクル毎に振幅の増加が見られる。 $\lambda = 1.6$, $k_y = 0.25$ (図4-2, 図7-8参照) の場合、変位応答波形は一方向に若干流れているのがわかるが、エネルギー応答波形からそれを判断するのは困難である。もし、最大変位応答量だけに着目するなら前者の場合は最大エネルギー振幅 (図4-1参照) が、また後者の場合は適当な時間内に系へ入るエネルギーの総量が最大変位応答量と直接関係を持つものと考えられる。図5に降伏せん断力係数 k_y (降伏せん断力 Q_v /自重 mg) とエネルギー入力の最大値との関係を示す。図6にエネルギー入力波形の最大サイクル間だけにおける同様の関係を示す。図7に降伏せん断力係数 k_y と最大変位応答値の関係を示す。相等しい λ について図5と図6を比較すると若干の相異が見られる。これは正弦波による応

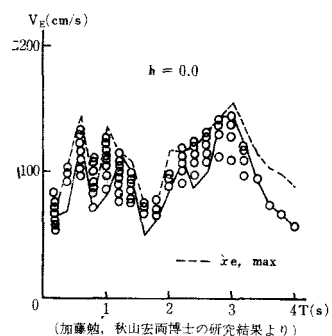


図3

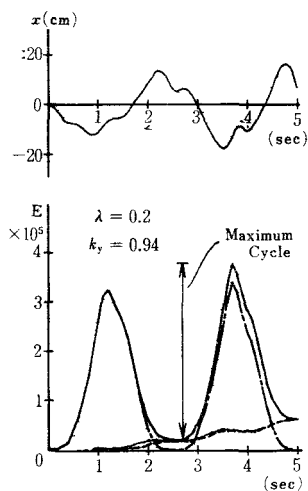


図4-1 応答波形

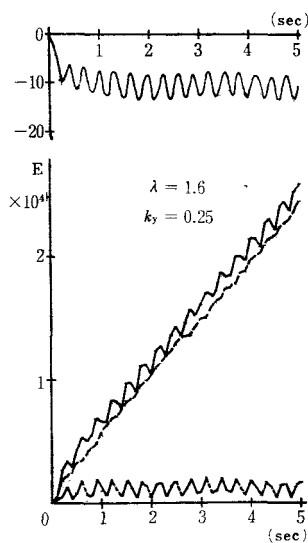


図4-2 応答波形

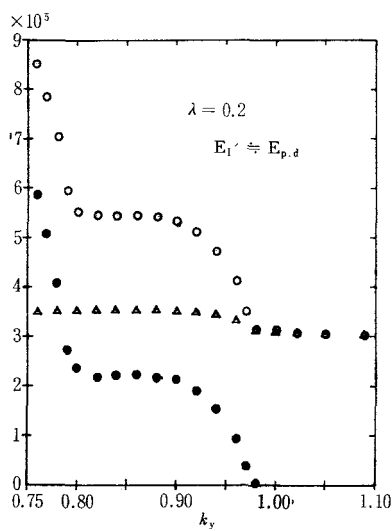


図5-1 エネルギー入力- k_y の関係

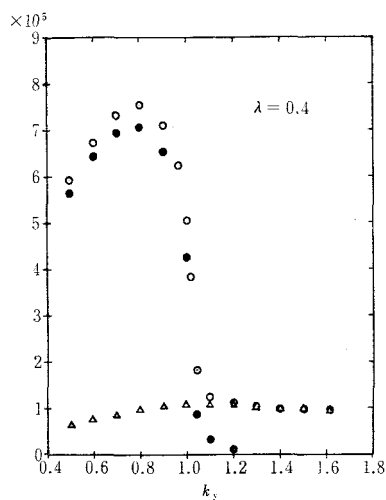
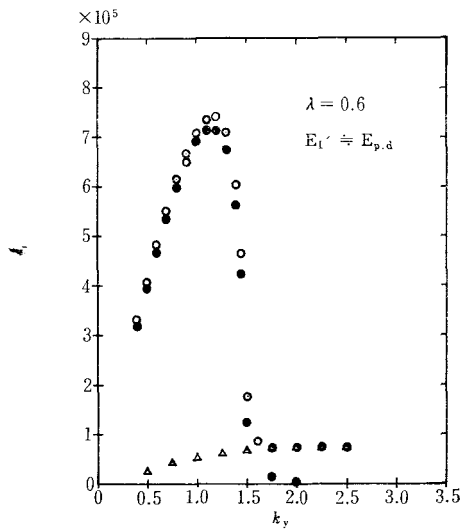
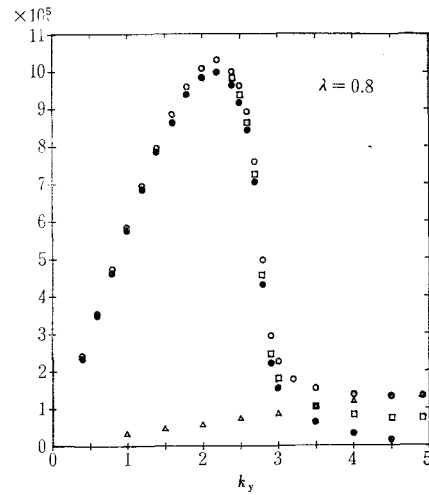
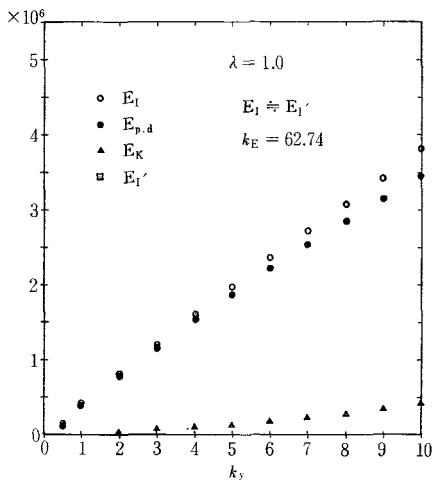
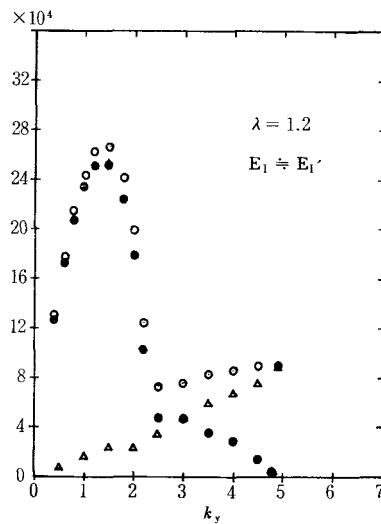


図5-2 エネルギー入力- k_y の関係

答が一般の地震波による応答と異なり系に適当な減衰があれば2～3サイクル後に定常振動状態になるものと考えられる。図5に示すエネルギー入力の最大値、特に総エネルギー入力と塑性歪によって消費されたエネルギー量 $E_{p.d}$ の降伏強度の変化による特性は、主に上記の定常振動部の塑性歪によって消費されたエネルギー量の累積和がより鮮明に表現されたものであると考えられる。降伏強度の変化がエネルギー入力に与える影響は振動数比 λ の相異によって若干異なる。 $\lambda < 1.0$ (図5-1～4参照) の場合、降伏せん断力が線形の場合の最大応答せん断力とあまり変らない適当な範囲で総エネルギー入力 E_L , E_L' , 運動エネルギー E_K , E_K' (混乱を避けるため図中に表示されていない) は線形依存性を示すか、又は線形の場合よりも若干増加する。しかも、この範囲内で総エネルギー入力と運動エネ

図5-3 エネルギー入力- k_y の関係図5-4 エネルギー入力- k_y の関係図5-5 エネルギー入力- k_y の関係図5-6 エネルギー入力- k_y の関係

ルギーの最大応答値は強い相関を示す。降伏せん断力が適当な値以下になると総エネルギー入力履歴減衰エネルギーに対し強い依存性を示す。履歴減衰エネルギーは降伏せん断力の減少によって増加し、ある降伏せん断力で最大となる。さらに降伏せん断力を減少させると履歴減衰エネルギーも減少する。 $\lambda \geq 1.0$ (図5-5~8参照) の場合、降伏せん断力が線形の場合の最大応答せん断力とあまり変わらない適当な範囲で総エネルギー入力、運動エネルギーは線形の場合よりも若干減少することを除けば $\lambda > 1.0$ の場合と等しい傾向を示すと言える。

最大変位応答量との相関という点に着目するなら、最大エネルギー振幅を有するサイクルにおけるエネルギー量のほうが多くの情報を有すると思われる。図6はエネルギー入力波形の最大サイクル間

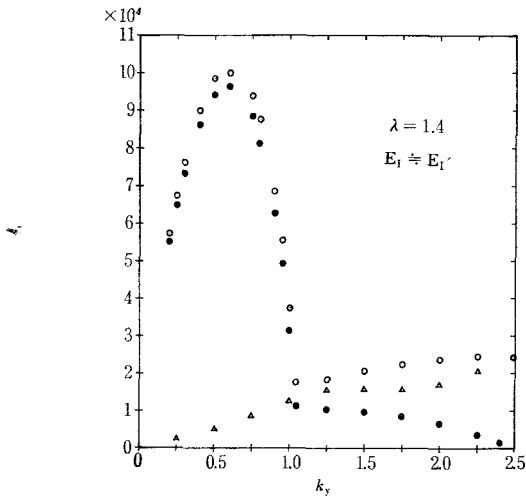


図5-7 エネルギー入力- k_y の関係

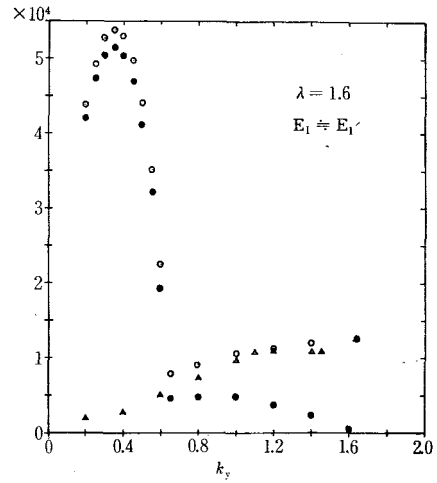


図5-8 エネルギー入力- k_y の関係

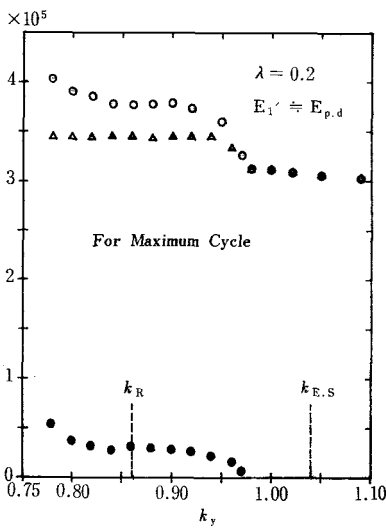


図6-1 エネルギー入力- k_y の関係

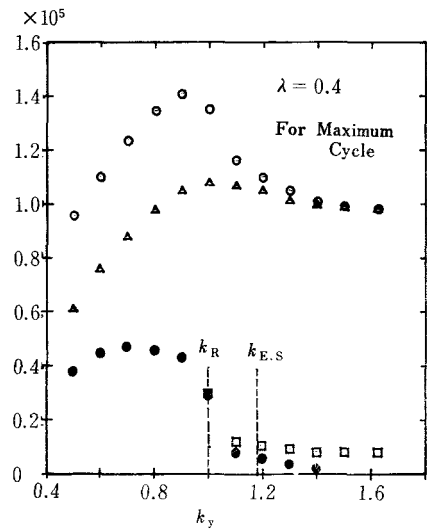
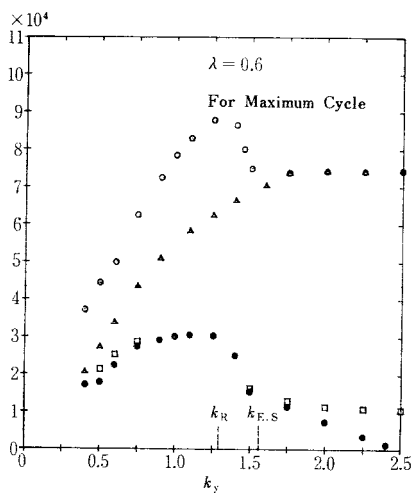
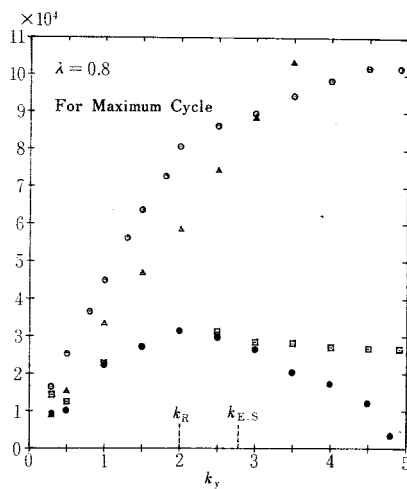
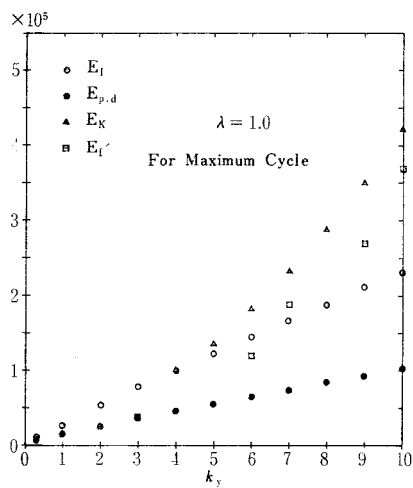
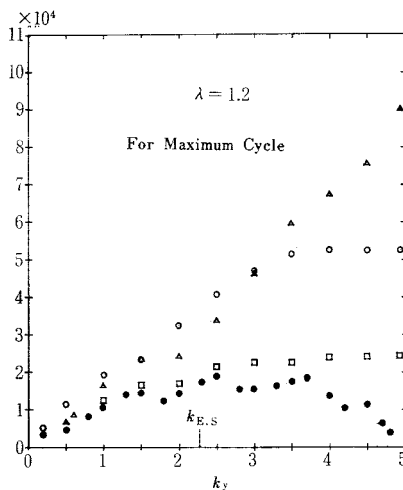
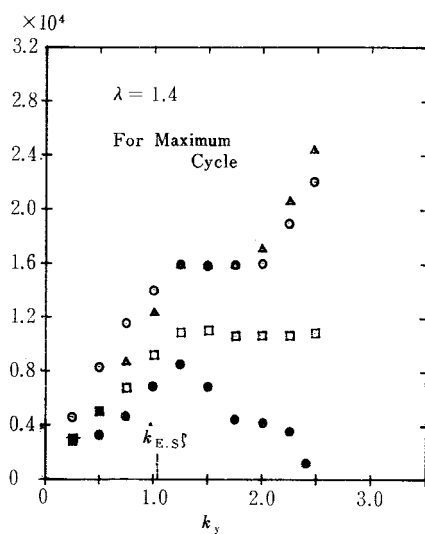
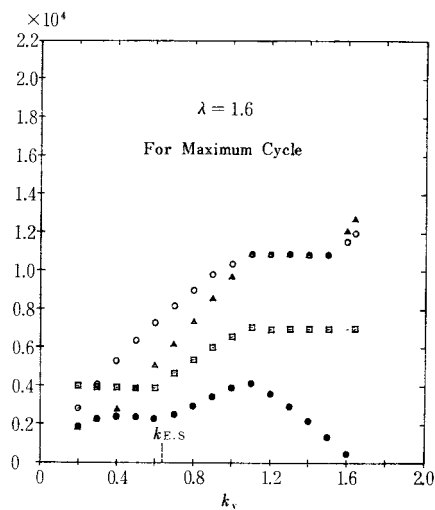


図6-2 エネルギー入力- k_y の関係

におけるエネルギー入力と降伏強度の関係を示したものである。降伏強度の変化がエネルギー入力に与える影響は振動数比 λ の相異によって若干異なるが、 $\lambda < 1.0$ (図6-1~4参照) の場合、総エネルギー入力 E_I 、 E_I' は降伏せん断力の減少によって増加しある降伏せん断力で最大となる。さらに降伏せん断力を減少させると総エネルギー入力 E_I 、 E_I' も減少する。 $\lambda \geq 1.0$ (図6-5~8参照) の場合、総エネルギー入力 E_I' は、降伏せん断力が線形の場合の最大応答せん断力とあまり変らない適当な範囲内で線形依存性を示し、その範囲以下の降伏強度に対し線形の場合よりも小さくなることがわかる。定常振動による解析結果を降伏せん断力係数 ($k_{E.S}$) で表わせば次式で与えられる。

$$k_{E.S} = \frac{1}{1 - \lambda^2} \dots\dots\dots (8)$$

図6-3 エネルギー入力- k_y の関係図6-4 エネルギー入力- k_y の関係図6-5 エネルギー入力- k_y の関係図6-6 エネルギー入力- k_y の関係図6-7 エネルギー入力- k_y の関係図6-8 エネルギー入力- k_y の関係

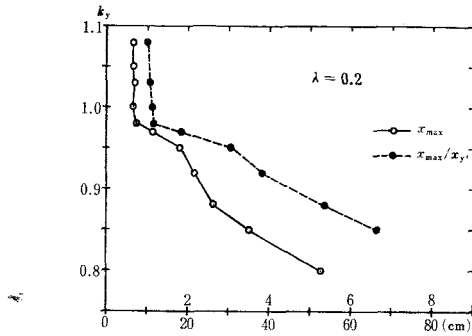


図7-1

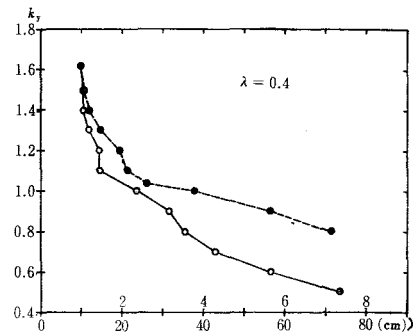


図7-2

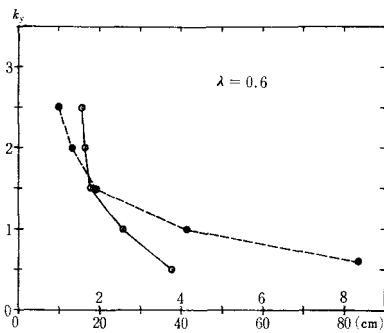


図7-3

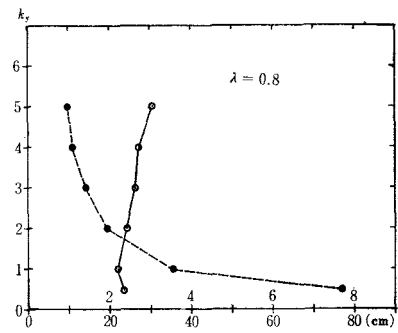


図7-4

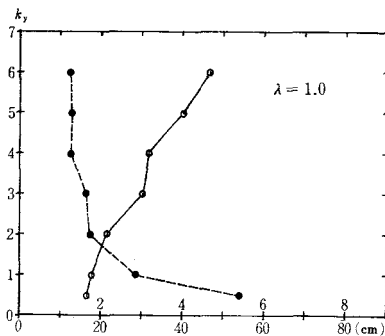


図7-5

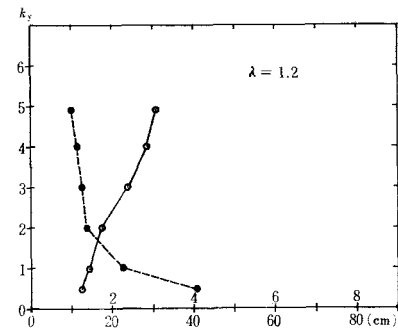


図7-6

また、正弦波地動に対する1質点系の弾塑性定常応答(近似解)¹²⁾ 結果より、 $1 > \lambda$ なる各 λ について共振振幅を与える降伏せん断力係数 (k_R) を $k_{E.S}$ と共に図6に示す。図より、総エネルギー入力 $E_{I'}$ の線形依存性が期待できる範囲は $k_{E.S}$ までであると言えよう。 $\lambda < 1.0$ の場合、総エネルギー入力 $E_{I'}$ が最大となる降伏せん断力係数は k_R よりも若干小さな k_y となる。この差は過度振動による影響と考えられるが、両者に大差はなく近似的に k_R と見なせるようである。

§ 4 結 論

以上、構造物が激震を受けた場合の性状を対象に、正弦波地動によって1質点系完全弾塑性モデルに入ってくる入力エネルギーと系によって吸収される各種エネルギーの特性について検討した。入力地震波の選定、復元力特性の差異による影響、入力エネルギー量と変形量の関係等たくさんの問題が

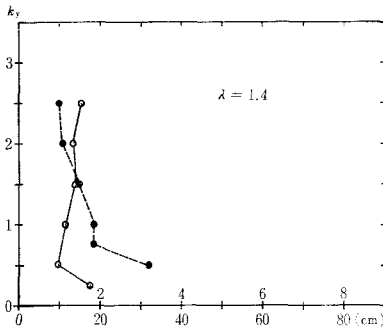


図7-7

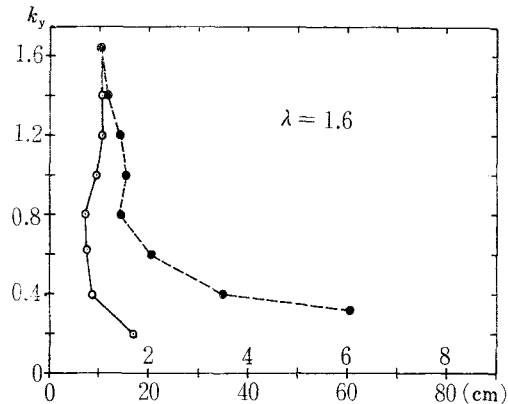


図7-8

残っているが次の結論を得る。

1) 総エネルギー入力 E_I' の線形依存性が期待できる範囲は定常振動によって求めた弾性限界降伏せん断力と線形最大応答せん断力の間である。

2) $\lambda < 1.0$ の場合、総エネルギー入力 E_I' は降伏せん断力の減少によって増加し、近似的に定常共振振幅を与える降伏せん断力で最大となる。

本報告の計算にあたり、呉工業高等専門学校計算機室 FACOM 230-28S を使用した。関係諸氏に感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) 異形鉄筋コンクリート設計法研究会編：異形鉄筋コンクリート設計法，技報堂，1971年
- 2) Housner, G.W. : Limit Design of Structures to Resist Earthquakes, 1st WCEE, 1956
- 3) Housner, G.W. : The Plastic Failure of Frames during Earthquakes, Proc. II WCEE, 1960
- 4) G.V. Berg and S.S. Thomaidis : Energy Consumption by Structures in Strong-Motion Earthquake, Proc. II WCEE, 1960
- 5) James Lord : Inelastic Dynamic Behavior of Tall Buildings, Proceedings of the International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Vol. 16, 1972
- 6) 加藤 勉，秋山 宏：強震による構造物へのエネルギー入力と構造物の損傷，日本建築学会論文報告集，第235号，昭和50年9月
- 7) 加藤 勉，秋山 宏：鋼構造剛接骨組の耐震極限設計，日本建築学会論文報告集，第237号，昭和50年11月
- 8) 加藤 勉，秋山 宏：鋼構造の弾塑性地震応答と耐震設計へのアプローチ，住友金属鋼構造研究特集号，第28巻第3号，昭和51年7月
- 9) 門前勝明：減力時の剛性低下が地震応答性状に及ぼす影響について（その1，正弦波による応答解析），日本建築学会中国支部研究報告，昭和51年3月
- 10) P.C. Jennings, G.W. Housner and N.C. Tsai : Simulated Earthquake Motions for Design Purposes, IV WCEE, 1969
- 11) H. Bolton Seed, R. Murarka, J. Lysmer and I. M. Idriss : Relationships between Maximum Acceleration, Maximum Velocity, Distance from Source and Local Site Conditions for Moderately Strong Earthquakes, Earthquake Engineering Research Center, Report No. EERC 75-17, July, 1975, University of California, Berkeley, California
- 12) 田治見宏：建築振動学，コロナ社（昭和51年12月1日受付）

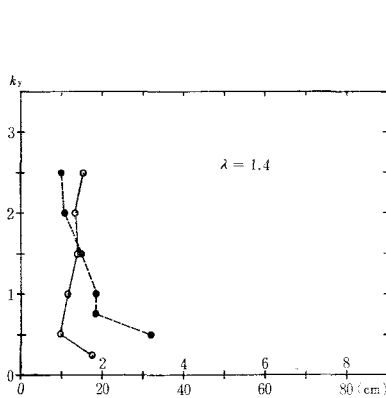


図7-7

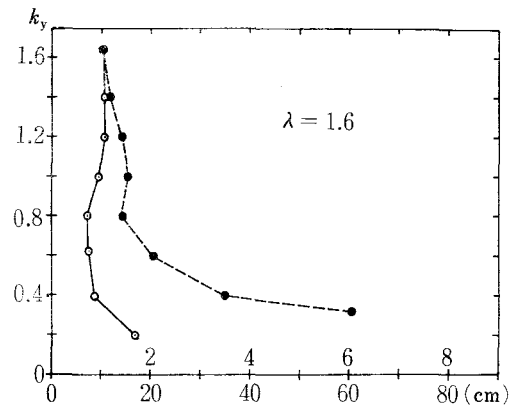


図7-8

残っているが次の結論を得る。

- 1) 総エネルギー入力 E_I' の線形依存性が期待できる範囲は定常振動によって求めた弾性限界降伏せん断力と線形最大応答せん断力の間である。
- 2) $\lambda < 1.0$ の場合、総エネルギー入力 E_I' は降伏せん断力の減少によって増加し、近似的に定常共振振幅を与える降伏せん断力で最大となる。

本報告の計算にあたり、呉工業高等専門学校計算機室 FACOM 230-28S を使用した。関係諸氏に感謝の意を表わします。

参 考 文 献

- 1) 異形鉄筋コンクリート設計法研究会編：異形鉄筋コンクリート設計法，技報堂，1971年
- 2) Housner, G.W. : Limit Design of Structures to Resist Earthquakes, 1st WCEE, 1956
- 3) Housner, G.W. : The Plastic Failure of Frames during Earthquakes, Proc. II WCEE, 1960
- 4) G.V. Berg and S.S. Thomaides : Energy Consumption by Structures in Strong-Motion Earthquake, Proc. II WCEE, 1960
- 5) James Lord : Inelastic Dynamic Behavior of Tall Buildings, Proceedings of the International Conference on Planning and Design of Tall Buildings, Vol. 16, 1972
- 6) 加藤 勉，秋山 宏：強震による構造物へのエネルギー入力と構造物の損傷，日本建築学会論文報告集，第235号，昭和50年9月
- 7) 加藤 勉，秋山 宏：鋼構造剛接骨組の耐震極限設計，日本建築学会論文報告集，第237号，昭和50年11月
- 8) 加藤 勉，秋山 宏：鋼構造の弾塑性地震応答と耐震設計へのアプローチ，住友金属鋼構造研究特集号，第28巻第3号，昭和51年7月
- 9) 門前勝明：減力時の剛性低下が地震応答性状に及ぼす影響について（その1，正弦波による応答解析），日本建築学会中国支部研究報告，昭和51年3月
- 10) P.C. Jennings, G.W. Housner and N.C. Tsai : Simulated Earthquake Motions for Design Purposes, IV WCEE, 1969
- 11) H. Bolton Seed, R. Murarka, J. Lysmer and I. M. Idriss : Relationships between Maximum Acceleration, Maximum Velocity, Distance from Source and Local Site Conditions for Moderately Strong Earthquakes, Earthquake Engineering Research Center, Report No. EERC 75-17, July, 1975, University of California, Berkeley, California
- 12) 田治見宏：建築振動学，コロナ社

(昭和51年12月1日受付)

編 集 委 員

糸	島	寛	典
下	村		登
茶	木	正	吉
広	光	清	次郎
竹	村	和	夫
門	前	勝	明

呉工業高等専門学校
研 究 報 告

第12巻 第2号 (1977)
(通巻 第19号)

昭和 52 年 3 月 印 刷
昭和 52 年 3 月 発 行

編集兼
発行者 呉工業高等専門学校
〒 737 呉市阿賀南2丁目2ノ11
電話 呉 (0823) 71-9121

印刷所 柳 盛 社 印 刷 所
〒 730 広島市東白島 8-23
電 話 (21) 2148・2149

MEMOIRS OF THE KURE TECHNICAL COLLEGE

1. Mysticism in John Steinbeck's Novels	Noboru SHIMOMURA..... 1
2. Studies on the Eccentric Profile Cam with a Reciprocating Follower (Report 2) —Flat Plate Follower—	Hironori ITOSHIMA..... 9
3. Studies on the Eccentric Profile Cam with an Oscillating Follower (Report 1) —Circular Arc Follower—	Hironori ITOSHIMA and Masaki KŌNO.....23
4. An Experimental Study of the Output Probability to a Zero-Memory Time-Variant System with a Non-linear Feedback Element and an Arbitrarily Distributed Random Excitation	Seijiro HIROMITSU and Mitsuo OHTA.....39
5. FORTRAN Training System COLT/KTC	Shigeki MURAKAMI, Nobuyuki YOSHINO and Masayoshi MACHIDA.....53
6. A Study in Modelling Effect with the Distribution of Luminance	Kazuhiko HARADA.....59
7. Fundamental Study on the Deflection Analysis of Underlying Soil — 2 Dimensional Elastic Analysis—	Shigehisa KOBORI and Hisao ABOSHI.....63
8. An Example of Boundary-value Problems on Bending of Thin Plate	Seirō MARUGAMI.....83
9. Model Experiment on the Anchor Effect of Rock Bolt of Stratified Rock Slope	Yoshiharu ISHII.....93
10. The Dynamic Bearing Capacity of a Concrete Pile	Kiyohiko KURO... 101
11. Hysteretic Damping and Equivalent Viscous Damping (Part 1)	Katsuaki MONZEN... 115
12. Energy Input to Structures in Earthquakes and Energy Consumption by Structures	Katsuaki MONZEN... 127